حـــل تـــمریـــنات معادلات دیفرانسیل

مبحث لاپلاس

تهیه و تدوین:

محسن محمدرضاپورطبری

کاری از واحد آموزشی انجمن تخصصی مهندسی علوم آب

www.waterse.ir

با سلام خدمت همه دانشجویان عزیز

این مجموعه که در پیش رو دارید حاصل جمع آوری تمرینات مهم و مسائلی که در آزمون های پایان ترم و کنکور کارشناسی ارشد مکرر تکرار شده است. هدف بنده از تهیه این مجموعه سوال و جواب، صرفه‌جویی در وقت دانشجویان و تمرکز دانشجویان بر روی یک مجموعه به منظور کسب موفقیت بیشتر بوده است.

به نظر بنده با خواندن این سوالات، دانشجویان می‌توانند در امتحانات پایان ترم و در آزمون های کنکور کارشناسی ارشد نمره و درصد خوبی کسب کنند.

این مجموعه از کتب مرجع ریاضیات مهندسی و معادلات دیفرانسیل، همچون بویس، سیمونز، شومز، نیکوکار، معتقدی، شیدفر و ... گرداوری شده و سعی شده با زبانی ساده و به دور از تکلف مسائل لاپلاس را بازگو کند.

هر مجموعه در ابتدای راه دارای نواقصی است که می‌طلبد خوانندگان عزیز بنده را در این امر همراهی کنند و با نظرات خودشان چراغی روشن در این مسیر باشند.

تبدیل لاپلاس توابع زیر را بیابید.

1. $\boldsymbol{f(t) = e^{2t}\cos(2t+4)}$

$$f(t) = e^{2t}\big[[\cos 2t\cos 4] - [\sin 2t \sin 4]\big] = 0.6\ell[e^{2t}\cos 2t] + 0.7\ell[e^{2t}\sin 2t]$$

$$F(s)=\frac{-0.6(s-2)}{(s-2)^2+4} + \frac{0.7\times 2}{(s-2)^2+4} = \frac{-0.6s+1.6}{(s-2)^2+4}$$

2. $\boldsymbol{f(t) = u_3(t)(t-3)^2 e^{t-3}\sin(t-3)}$

$$e^{-3s}\ell[t^2e^t\sin t] = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)'' \; s \longrightarrow s-1 \quad F(s) = e^{-3s}\frac{6(s-1)^2-2}{[(s-1)^2+1]}$$

3. $\boldsymbol{f(t) = u_\pi(t)(t-\pi)^2 e^{2t}\sin 3t}$

$$e^{-\pi s}\ell\left[te^{2(t+\pi)}\sin(t+\pi)\right] = e^{-\pi(s-2)}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' \; s \longrightarrow s-1 = \frac{-6e^{-\pi(s-2)}s-2}{[(s-2)^2+9]^2}$$

4. $\boldsymbol{f(t) = \begin{Bmatrix} t^2 & 0 \le t < 2 \\ 3 & t \ge 2 \end{Bmatrix}}$

$$t^2[u_0(t) - u_2(t)] + 3[u_2(t)] \qquad \rightarrow F(s) = \frac{2!}{s^3} - \frac{2!\,e^{-2s}}{s^4} + \frac{3e^{-2s}}{s}$$

5. $\boldsymbol{f(t) = \{1 \quad 0 \le t \le 1 \;,\; -1 \quad 0 < t < 1\}, f(t) = f(t+2)}$

$$= \frac{\int_0^1 e^{-sx}dt - \int_1^2 e^{-sx}dt}{1-e^{-2s}} \quad \rightarrow F(s) = \frac{\frac{1}{s}(e^{-2s} - 2e^{-s} + 1)}{1-e^{-2s}}$$

6. $\boldsymbol{f(t) = \begin{Bmatrix} t & 0 \le t \le \pi \\ 2\pi - t & \pi < t < 2\pi \end{Bmatrix}, f(t) = f(t+2\pi)}$

$$= \frac{\int_0^\pi te^{-sx}dt + \int_\pi^{2\pi}(2\pi - t)e^{-sx}dt}{1-e^{-2\pi s}} \qquad \rightarrow F(s) = \frac{-2e^{-\pi s}}{s^2(1-e^{-2\pi s})}$$

7. $\boldsymbol{f(t) = \frac{\sin 4t}{t}}$

$$\int_s^\infty \frac{4}{u^2+16}dt = \tan^{-1}\frac{u}{4}\Big]_s^\infty \quad \rightarrow F(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{4} = \cot^{-1}\frac{s}{4}$$

8. $\boldsymbol{f(t) = \int_0^t (t-x)^3 \sin x\, dx}$

$$f_1(t) = t^3 \quad \to F_1(s) = \frac{3!}{s^4}$$

$$f_2(t) = \sin t \quad \to F_2(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$F(s) = \frac{3!}{s^4(s^2+1)}$$

9. $\boldsymbol{f(t) = \delta(t-1)\cos t}$

$$F(s) = (\cos 1)e^{-s}$$

10. $\boldsymbol{f(t) = \begin{Bmatrix} 0 & t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < t < 3\frac{\pi}{2} \\ 2 & t \geq 3\frac{\pi}{2} \end{Bmatrix}}$

$$\left[u_{\frac{\pi}{2}}(t) - u_{3\frac{\pi}{2}}(t)\right] + 2\left[u_{3\frac{\pi}{2}}(t)\right] \quad \to F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} - \frac{e^{-3\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{2e^{3\frac{\pi}{2}s}}{s} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{e^{-3\frac{\pi}{2}s}}{s}$$

11. $\boldsymbol{f(t) = t^2(\cos 3t)^2}$

$$t^2\left(\frac{\cos(6x+1)}{2}\right) \quad \to \ F(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{s}{s^3(s^2+36)}$$

12. $\boldsymbol{f(t) = \sqrt{t}e^t}$

$$F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2(s-1)^{\frac{3}{2}}}$$

13. $\boldsymbol{f(t) = te^{-t}\cos 2t}$

$$\left(\frac{1}{s^2+4}\right)' s \longrightarrow s+1 \qquad F(s) = \frac{-s^2+4}{(s^2+4)^2}$$

14. $\boldsymbol{f(t) = t^3e^{-2t}\sin at\cos bt}$

$$A = \frac{a+b}{2}, \qquad B = \frac{a-b}{2}$$

$$F(s) = \left[\frac{24A(s-2)(A^2+(s-2)^2)^4}{2[(A^2+(s-2)^2)^3 - (48A(s-2)^3)]} + \frac{24B(s-2)(B^2+(s-2)^2)^4}{2[(B^2+(s-2)^2)^3 - (48B(s-2)^3)]}\right] \times (-1)$$

15. $\boldsymbol{f(t) = t^2 + \int_0^t \sin(t-x)\, f(x)dx}$

$$F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{F(s)}{s^2+1} \qquad \rightarrow\ F(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

16. $\boldsymbol{J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left({}^{t}/_{2}\right)^{2n}}{n!^2}}$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left({}^{1}/_{2}\right)^n}{n!} \times \left({}^{1}/_{s}\right)^{2n+1}$$

17. $\boldsymbol{erf(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du}$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n u^{2n}}{n!} du \quad \rightarrow \ell\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!\, n!}\right)$$

$$\rightarrow\ F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{(2n+1)!}{s^{2n+1}}}{(2n+1)!\, n!}$$

18. $\boldsymbol{f(t) = \int_0^t \left(t^{1/2} - 2\sin h(2t)\right) dt}$

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} - \frac{2}{s^2-1}\right)$$

19. $\boldsymbol{f(t) = (t-\pi)u_{\pi}(t)}$

$$\rightarrow\ e^{-\pi s}\ell[t-\pi+\pi] \ \Rightarrow\ F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$$

20. $\boldsymbol{f(t) = (t)^3 u_2(t)}$

$$\rightarrow\ e^{-2s}\ell[(t+2)^3] \ \Rightarrow\ F(s) = e^{-2s}\left(\frac{6}{s^4} + \frac{8}{s} + \frac{12}{s^3} + \frac{12}{s^2}\right)$$

21. $\boldsymbol{f(t) = \sin t\, u_{\pi}(t)}$

$$\rightarrow\ e^{-\pi s}\ell[\sin(t+\pi)] \ \Rightarrow\ F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

22. $\boldsymbol{f(t) = \frac{e^t}{t}}$

$$\rightarrow \ F(s) = \int_s^{\infty} \frac{1}{u-1}\, du = \ \ln \frac{1}{s-1}$$

23. $\boldsymbol{f(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-at} \sin t}{t} dt}$

$$\rightarrow \ F(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+a)^2+1}\, ds = \ \cot^{-1} a$$

24. $\boldsymbol{f(t) = e^{2t} \int_0^t \frac{e^{-t} \sin 2t}{t} dt}$

$$\rightarrow \ \int_s^{\infty} \frac{2}{u^2+4}\, ds = \ \cot^{-1} \frac{s}{2}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{s-2} \cot^{-1} \frac{(s+1-2)}{2} = \frac{1}{s-2} \cot^{-1} \frac{(s-1)}{2}$$

25. $\boldsymbol{f(t) = \int_0^{\infty} t^2 \cos t\, dt}$

$$= \ \int_0^{\infty} e^{-st} t^2 \cos t\, dt$$

$$\Rightarrow \ \left(\frac{s}{s^2+1}\right)'' \overset{s=0}{\Longrightarrow} \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^2} = 0$$

26. $\boldsymbol{f(t) = \int_0^{\infty} t\, e^{4t} \cos 2t\, dt}$

$$\Rightarrow \ -\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' \overset{s=4}{\Longrightarrow} \frac{4-s^2}{(s^2-4)^2} = \frac{3}{100}$$

27. $\boldsymbol{f(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}}$

$$\Rightarrow \ \int_s^{\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right) du = \ \ln \frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$$

$$\Rightarrow \ F(s) = \ \int_s^{\infty} \ln \frac{\sqrt{u^2+1}}{u} du = s \ln \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s$$

28. $\boldsymbol{f(t) = t\int_0^t \frac{e^{3t}\sin ht}{t}dt}$

$$\rightarrow \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+4}\, ds = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1} \xrightarrow{s\rightarrow s-3} \frac{1}{2}\ln\frac{s-2}{s-4}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{1}{s}} \frac{1}{2s}\ln\frac{s-2}{s-4} \xrightarrow{\text{مشتق}} F(s) = \frac{1}{2s}\ln\frac{s-2}{s-4} + \frac{1}{s(s-2)(s-4)}$$

29. $\boldsymbol{f(t) = \sin t * \cos t}$

$$\rightarrow \int_0^t \sin x\cos(t-x)\ dx = \frac{1}{2}t\sin t$$

30. $\boldsymbol{f(t) = \int_0^t (t-x)^3\, x^5 dx}$

$$\rightarrow F(s) = \frac{3!}{s^4} \times \frac{5!}{s^6}$$

تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بیابید.

31. $F(s) = \frac{1}{4s^2-9}$

$$\frac{1/4}{s^2 - 9/4} \quad \rightarrow \quad f(t) = \sin h\left(3/2\, t\right)$$

32. $F(s) = \frac{1}{s^2+2s+10}$

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2+9} \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t$$

33. $F(s) = \frac{1}{s^2-2s+8}$

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2+7} \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}e^{t}\sin\sqrt{7}t$$

34. $F(s) = \ln\frac{s+1}{s+3}$

$$\frac{1}{t}F(s)' = f(t) \quad \rightarrow \quad F(s)' = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{(e^{-t}-e^{-3t})(-1)}{t}$$

35. $F(s) = \tan^{-1}\left(\frac{s}{p}\right)$

$$\frac{1}{t}F(s)' = f(t) \quad \rightarrow \quad F(s)' = \frac{1/p}{1+\frac{s^2}{p^2}} \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{(\sin pt)(-1)}{t}$$

36. $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

$$F(s) = \frac{\boldsymbol{s^2-1}}{(\boldsymbol{s^2+1})^2} + \frac{1}{(\boldsymbol{s^2+1})^2} \quad \rightarrow \quad f(t) = t\cos t + \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

37. $F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}e^{-\pi s}$

$$F(s) = \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4}\right] \times e^{-\pi s} \quad \rightarrow$$

$$f(t) = u_\pi(t)e^{-(t+\pi)}(\sin 2(t+\pi) + \cos 2(t+\pi))$$

38. $F(s) = \frac{s}{s^2+1}\cot^{-1}(s+1)$

$$F_1(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad f(t) = \cos t$$

$$F_2(s) = \cot^{-1}(s+1) \xrightarrow{\text{طبق سوال 7}} f(t) = \frac{1}{t}e^{-t}\sin t$$

$$\xrightarrow{\text{کانولوشن}} f(t) = \int_0^t \cos(t-x)\frac{e^{-x}\sin x}{x}dx$$

39. $F(s) = \ln\left(1 + {}^{1}/_{s^2}\right)$

$$\frac{1}{t}F(s)' = f(t) \quad \rightarrow \quad F(s)' = \frac{2s}{s^2+1} - \frac{2s}{s^2} \quad \rightarrow \quad f(t) = 2\cos t - 2$$

40. $F(s) = \frac{s+11}{(s-1)(s+3)}$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کسرها}} F(s) = \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s+3} \quad \rightarrow \quad f(t) = 3e^t - 2e^{-3t}$$

41. $s^2F(s) + sF(s) - 6F(s) = \frac{s^2+4}{s^2+s}$

$$F(s) = \frac{s^2+4}{s(s+1)(s+3)(s-2)}$$

$$F(s) = \frac{-{}^{2}/_{3}}{s} + \frac{{}^{5}/_{12}}{s+1} - \frac{{}^{13}/_{30}}{s+3} + \frac{{}^{4}/_{15}}{s-2}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{-2}{3} + \frac{5}{12}e^t - \frac{13}{30}e^{-3t} + \frac{4}{15}e^{2t}$$

42. $F(s) = \ln\frac{s+1}{s-3}$

$$\frac{1}{t}F(s)' = f(t) \quad \rightarrow \quad F(s)' = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-5} \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{(e^{-2t} - e^{-5t})(-1)}{t}$$

43. $\boldsymbol{F(s) = \ln\frac{s^2+9}{s^2+1}}$

$$\frac{1}{t}F(s)' = f(t) \quad \rightarrow \quad F(s)' = \frac{2s}{s^2+9} - \frac{2s}{s^2+1} \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{2\cos 3t - 2\cos t}{t}$$

44. $\boldsymbol{sF(s) - F(s) = \frac{2s+5}{s^2+2s+1}}$

$$F(s) = \frac{2s+5}{(s+1)^2(s-1)}$$

$$F(s) = \frac{-{}^{3}/_{2}}{(s+1)^2} - \frac{{}^{7}/_{4}}{s+1} + \frac{{}^{7}/_{4}}{s-1}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{-3}{2}e^{-t}x - \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{7}{4}e^{t}$$

45. $\boldsymbol{F(s) = \frac{s^2}{(s-1)^4}}$

$$F(s) = \frac{(s-1)^2 + 2(s-1) + 1}{(s-1)^4}$$

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = e^{t}\left(t + t^2 + \frac{t^3}{6}\right)$$

46. $\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}}$

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{(s+2)^2 + 16}}$$

$$f(t) = e^{-t}\ell^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{(s)^2 + 16}}\right] \quad \rightarrow \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{4}\ell^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{s}{4}\right)^2 + 1}}\right]$$

$$\rightarrow \ \ell^{-1}[F(KS)] = \frac{1}{K} f\left(\frac{t}{K}\right) \quad , \quad \ell[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{4} J_0(4t)$$

47. $\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{s^{3/2}}}$

$$f(t) = t^{1/2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

48. $\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}}$

$$f(t) = \frac{1}{4}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)$$

49. $\boldsymbol{F(s) = \frac{3s-4}{s^2(s^2-9)}}$

$$\mathrm{F(s)} = \frac{-\frac{1}{3}\mathrm{s} + \frac{4}{9}}{\mathrm{s}^2} + \frac{\frac{1}{3}\mathrm{s} - \frac{4}{9}}{\mathrm{s}^2 - 9}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{3}\cos h(3t) - \frac{4}{27}\sin h(3t) + \frac{4}{9}t - \frac{1}{3}$$

50. $\boldsymbol{F(s) = \frac{e^{-s}}{s^4}}$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{6}(t-1)^3 u_1(t)$$

51. $\boldsymbol{F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+4}}$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}\sin 2(t+2)\, u_2(t)$$

52. $\boldsymbol{F(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(s+2)}}$

$$\mathrm{F(s)} = \frac{1}{s(s+2)} - \frac{e^{-s}}{s(s+2)}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) - \frac{1}{2}\left(1-e^{-2(t-1)}\right)u_1(t)$$

53. $\boldsymbol{F(s)=\frac{se^{3s}}{(s^2-9)}}$

$$f(t)=\cos h3(t+3)\,u_{-3}(t)$$

54. $\boldsymbol{F(s)=\cot^{-1}(s+4)}$

$$\frac{1}{t}F(s)'=\ f(t)\quad\rightarrow\quad F(s)'=\frac{-1}{1+(s+4)^2}\quad\rightarrow\quad f(t)=\frac{e^{-4t}\sin t}{t}$$

55. $\boldsymbol{F(s)=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}}$

$$\frac{1}{t}F(s)'=\ f(t)\quad\rightarrow\quad F(s)'=\frac{1}{1+s^2}\quad\rightarrow\quad f(t)=\int_0^t\frac{\sin t}{t}dt$$

56. $\boldsymbol{F(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}}$

$$\rightarrow\quad t\ell^{-1}\int_s^{\infty}\frac{u}{(u^2+1)^2}du\ =\frac{t}{2}\sin t$$

57. $\boldsymbol{F(s)=\frac{1}{s+1}\ln\frac{s}{s-1}}$

$$\mathrm{F}(\mathrm{s}_1)=\frac{1}{s+1}\quad\rightarrow\ f(t_1)=e^{-t}$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{s}_2)=\ln\frac{s}{s-1}\ \rightarrow\ f(t_2)=-\frac{1}{t}(1-e^t)$$

$$f(t)=\int_0^t e^{-(t-x)}\times\frac{1}{x}(1-e^x)\,dx=\int_0^t\frac{e^{2x}-e^x}{x}dx$$

58. $\boldsymbol{F(s)=\frac{s}{s^2+1}\cot^{-1}(s+1)}$

$$\mathrm{F}(\mathrm{s}_1)=\cot^{-1}(s+1)\ \ \rightarrow\ f(t_1)=\frac{e^{-t}\sin t}{t}$$

$$\mathrm{F}(\mathrm{s}_2)=\frac{s}{s^2+1}\ \rightarrow\ f(t_2)=\cos t$$

$$f(t)=\int_0^t\cos(t-x)\times\frac{e^{-x}\sin x}{x}dx$$

معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$\mathbf{59.}\boldsymbol{y'' + 4y = sin\,2t - sin(t-2\pi)\,u_{2\pi}(t) \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0}$$

$$s^2F(s) + 4F(s) = \frac{2}{\boldsymbol{s^2+4}} - \frac{e^{-2\pi s}}{\boldsymbol{s^2+1}}$$

$$F(s) = \frac{2}{(\boldsymbol{s^2+4})^2} - \frac{e^{-2\pi s}}{(\boldsymbol{s^2+4})(\boldsymbol{s^2+1})}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{8}[\sin 2t - 2t\cos 2t] - \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-x)\sin 2(x+2\pi)e^{-2\pi x}dx$$

$$\mathbf{60.}\boldsymbol{ty'' + y' - ty' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1}$$

$$F(s) = -\frac{d}{ds}[s^2F(s) - sy(0) - y'(0)] + sF(s) + y(0) - \frac{d}{ds}[sF(s) - y(0)] + F(s)$$

$$F(s) = -2sF(s) - s^2\frac{dF(s)}{ds} + 1 + sF(s) + 1 - F(s) - s\frac{dF(s)}{ds} + F(s)$$

$$\frac{dF(s)}{F(s)} = ds\left(\frac{2-s}{s(s^2+1)}\right) \rightarrow \quad \ln F(s) = \ln\frac{s^2}{(s+1)^3} \quad \rightarrow F(s) = \frac{s^2}{(s+1)^3}$$

$$\rightarrow F(s) = \frac{(s+1)^2 - 2(s+1) + 1}{(s+1)^3} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow \quad f(t) = 2e^{-1t} - 2te^{-1t}$$

$$\mathbf{61.}\boldsymbol{y'' - 2y' + 2y = f(t) \qquad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0}$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \mathbf{0} < \boldsymbol{t} < \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{1} & \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} < \boldsymbol{t} < \mathbf{3}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{3}\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \end{cases}$$

$$\left[u_{\frac{\pi}{2}}(t) - u_{3\frac{\pi}{2}}(t)\right] + 2\left[u_{3\frac{\pi}{2}}(t)\right] \quad \rightarrow F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} - \frac{e^{-3\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{2e^{3\frac{\pi}{2}s}}{s} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{e^{-3\frac{\pi}{2}s}}{s}$$

$$s^2F(s) - 2sF(s) + 2F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{e^{-3\frac{\pi}{2}s}}{s} \quad \rightarrow \quad F(s) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + e^{-3\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2-2s+2)}$$

$$\rightarrow \quad f(t)=\int_0^t\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}x}}{x}+\frac{e^{-3\frac{\pi}{2}x}}{x}\right)\times\left(e^{(t-x)}\sin(t-x)\right)dx$$

62. $\boldsymbol{y''+6y'+5y=e^t\delta(t-1) \qquad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=4}$

$$s^2F(s)+6sF(s)+5F(s)-4=e^{-(s-1)}$$

$$F(s)=\frac{e^{-(s-1)}}{s^2+6s+5}=\frac{e^{-(s-1)}}{(s+3)^2-4}$$

$$\rightarrow \quad f(t)=e^1\left[\frac{1}{2}e^{-3(t-3)}\sin h2(t-3)\right]$$

63. $\boldsymbol{y''+y=\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-2k\pi) \qquad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0}$

$$F(s)=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2k\pi s}}{1+s^2}$$

$$\rightarrow \quad f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k\pi}\sin(t-2k\pi)$$

64. $\boldsymbol{y'+2y+\int_0^t y\,dx=0 \qquad y(0)=1}$

$$sF(s)-1+2F(s)+\frac{F(s)}{s}=0 \qquad \rightarrow \quad F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\rightarrow \quad f(t)=e^{-t}+te^{-t}$$

ابتدا بسط $e^{-\frac{1}{s}}$ برحسب توان‌های $\frac{1}{s}$ بنویسید سپس $s^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{s}}$ را به صورت سری بنویسید. سپس نشان دهید :

65. $\boldsymbol{\ell\left(s^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{s}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{t}}$

جواب قسمت اول:

$$s^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{s}\right)^n}{n!}=1-\frac{1}{s}+\frac{\left(\frac{1}{s}\right)^2}{2!}-\frac{\left(\frac{1}{s}\right)^3}{3!}\pm\cdots$$

جواب قسمت دوم:

66. $\boldsymbol{s^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{s}}=}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,s^{\left(n+1/2\right)}}$$

جواب قسمت سوم:

67. $\boldsymbol{\ell\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{t}\right)}$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin 2\sqrt{t}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}s\ell\left(\sin 2\sqrt{t}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{یادآوری}}\ \sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}s\ell\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}2^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right)$$

$$\rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\times\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{s^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}\ \rightarrow$$

با توجه به جواب قسمت دوم، باید مقادیر زیر با هم برابر باشند تا مسئله اثبات شود:

$$\frac{1}{n!}=\frac{2^{(2n+1)}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(2+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma=\frac{1\times 3}{2\times 2}\sqrt{\pi}\quad \dots..$$

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{1\times 3\times 5\times \dots\dots(2n-1)(2n+1)}{2^n}\sqrt{\pi}\quad \xrightarrow{\text{توان 2 اضافه می کنیم}}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times \dots\dots(2n-1)^{2n}(2n+1)^{2n}}{2^n(2\times 4\times 6\times \dots\dots.2n)}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{(2n+1)}n!}\sqrt{\pi}\quad \rightarrow\quad \frac{1}{n!}=\frac{2^{(2n+1)}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{(2n+1)!}\times\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

مقادیر اولیه لاپلاس را اثبات کنید.

68.$\boldsymbol{\ell(y')=sF(s)-f(0)}$

$$\rightarrow f(0)=sF(s)-\ell(y')$$

$$s\rightarrow\infty\quad f(0)=\lim_{s\rightarrow\infty}sF(s)=0$$

69.$\boldsymbol{\ell(y'')=s^2F(s)-sf(0)-f'^{(0)}}$

$$s\rightarrow\infty\quad f'(0)=\lim_{s\rightarrow\infty}\big(sF(s)-f(0)\big)=0$$

لاپلاس تابع بسل را اثبات کنید.

70.$\boldsymbol{J_p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{(2n+1)}=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{1}{s}\times\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{s}\right)^2+1}}=\frac{1}{s}\left(1+\left(\frac{1}{s}\right)^2\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\quad\rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{یادآوری}} (1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots.\big(\alpha-(n-1)\big)x^n}{n!} \rightarrow$$

$$\frac{1}{s}\left[1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\ldots\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)\frac{1}{s}^{2n}}{n!}\right)\right]$$

$$\frac{1}{s}\left[1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1^2\times 3^2\times 5^2\times\ldots\ldots(2n-1)^{2n}\frac{1}{s}^{2n}}{2^n n!}\right)\right]$$

$$\frac{1}{s}\left[1+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!\left(\frac{1}{s}\right)^{2n}}{2^{2n}n!^2}\right)\right] \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!\left(\frac{1}{s}\right)^{2n+1}}{2^{2n}n!^2}$$