

فهرست

۱۰۹	فصل سوم - جریان سیال؛ مفاهیم و معادلات اصلی
۱۰۹	۳-۱ مقدمه
۱۰۹	۳-۲ طبقه‌بندی جریان سیال
۱۱۰	۳-۲-۱ جریان یکنواخت و غیر یکنواخت
۱۱۰	۳-۲-۲ جریان آرام (لایه‌ای یا ورقه‌ای) و درهم (جریان آشفته)
۱۱۲	۳-۲-۴ جریان دائمی (پایداریا ماندگار) و جریان غیر دائمی (ناپایدار)
۱۱۲	۳-۲-۵ جریان‌های تراکم پذیر و تراکم ناپذیر
۱۱۳	۳-۲-۶ جریان‌های چرخشی و غیر چرخشی
۱۱۳	۳-۲-۷ جریان‌های یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی
۱۱۴	۳-۳ خطوط جریان
۱۱۵	۳-۴ خطوط پتانسیل یا خطوط هم پتانسیل
۱۱۵	۳-۵ شبکهٔ جریان
۱۱۶	۳-۶ روابط اساسی مکانیک سیالات
۱۱۶	۳-۷ روش‌های اساسی تحلیل جریان
۱۱۶	۳-۸ مفاهیم سیستم، حجم کنترل
۱۱۷	۳-۸-۱ روش سیستم (جرم مشخص)
۱۱۷	۳-۸-۲ حجم کنترل (جرم مشخص)
۱۱۸	۳-۹ معادلهٔ انتقال رینولدز
۱۱۹	۳-۱۰ معادلات پیوستگی، انرژی و مومنتم
۱۱۹	۳-۱۰-۱ معادلهٔ پیوستگی
۱۲۰	دبی جریان (نرخ آبدهی یا شدت جریان)
۱۲۶	۳-۱۰-۲ معادله مومنتم (اندازه حرکت)
۱۳۰	۳-۱۰-۳ معادله انرژی

- ۱۳۰ ۱۱-۳ معادله اولر
- ۱۳۱ ۱۲-۳ معادله برنولی در مورد سیالات ایده آل
- ۱۳۲ ۱۳-۳ ماشین های هیدرولیکی
- ۱۳۴ ۱۴-۳ بازده η
- ۱۳۸ ۱۵-۳ تغییرات انرژی در یک سیستم سیال (خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی)
- ۱۴۱ ۱۶-۳ ضریب تصحیح انرژی جنبشی
- ۱۴۲ ۱۷-۳ ضریب تصحیح اندازه حرکت
- ۱۴۵ ۱۸-۳ کاربردهای معادله برنولی
- ۱۴۶ ۱۸-۳ اندازه گیری دبی بوسیله روزنه
- ۱۴۹ ۱۸-۳ سیفون
- ۱۶۴ سوالات فصل جریان سیالات، مفاهیم و معادلات اصلی
- ۱۷۱ **فصل چهارم - جریان عبوری از لوله ها**
- ۱۷۱ ۱-۴ مقدمه
- ۱۷۲ ۲-۴ انواع جریان در لوله ها
- ۱۷۲ ۲-۴ ۱-۲ جریان آرام (ورقه ای)
- ۱۷۲ ۲-۴ ۲-۲ جریان آشفته (متلاطم یا درهم)
- ۱۷۲ ۳-۴ معیار آرام یا آشفته بودن جریان با استفاده از عدد رینولدز
- ۱۷۶ ۴-۴ نیمرخ توزیع سرعت ها
- ۱۷۷ ۵-۴ جریان های داخلی و خارجی
- ۱۷۷ ۶-۴ لایه مرزی
- ۱۷۸ ۷-۴ جریان کاملاً توسعه یافته
- ۱۷۹ ۸-۴ تنش برشی در لوله ها
- ۱۸۲ ۹-۴ جریان آرام در لوله با سطح مقطع مدور
- ۱۸۴ ۱۰-۴ محاسبه افت
- ۱۸۶ ۱۱-۴ طریقه محاسبه f (ضریب اصطکاک دارسی ویسباخ)
- ۱۹۲ ۱۲-۴ معادلات تجربی برای تعیین دبی جریان
- ۱۹۲ ۱۲-۴ ۱-۱۲ فرمول هیزن - ویلیامز
- ۱۹۳ ۱۲-۴ ۲-۱۲ فرمول مانینگ
- ۲۰۱ ۱۳-۵ نیروی دراگ سیال (مقاومت سیال)
- ۲۰۲ ۱۳-۵ ۱-۱۳ نیروی دراگ جسم در مقابل انحراف مسیر جریان
- ۲۰۳ ۱۳-۵ ۲-۱۳ نیروی دراگ ناشی از نیروهای برشی (یا نیروی دراگ اصطکاکی)
- ۲۰۳ ۱۳-۵ ۳-۱۳ نیروی دراگ ناشی از شکل هندسی جسم
- ۲۰۳ جریان عبوری در لوله ها

فصل سوم

جریان سیال؛ مفاهیم و معادلات اصلی

۳-۱ مقدمه

استاتیک سیالات که در فصل قبل بررسی گردید، تقریباً یک علم دقیق است و در آن تنها یک کمیت یعنی فقط وزن مخصوص سیال را باید با آزمایش تعیین کرد. اما جریان سیال ذاتاً پیچیده است. قوانین اصلی مبین حرکت سیالات (دینامیک سیالات) را به راحتی نمی‌توان به صورت فرمول‌های ریاضی بیان کرد و مورد استفاده قرار داد. از این رو بنا گزیر باید به آزمایش روی آورد.

در این فصل، ابتدا تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای تجزیه و تحلیل حرکت سیال در وضعیت‌های مختلف بیان می‌شود. سپس معادلات اصلی حاکم بر جریان سیال مطرح می‌گردد.

۳-۲ طبقه‌بندی جریان سیال

حرکت سیال در یک مسیر را جریان سیال می‌نامند. جریان سیال از دیدگاه‌های مختلفی تقسیم‌بندی می‌گردد که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم. یک جریان سیال ممکن است یک یا چند نوع از این تقسیم‌بندی‌ها را همزمان داشته باشد.

۳-۲-۱ جریان یکنواخت^۱ و غیریکنواخت^۲

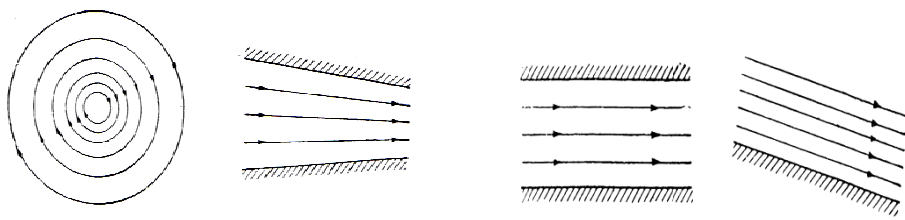
جریان یکنواخت به جریانی گفته می‌شود که در آن بردار سرعت، در هر لحظه مشخص، در تمام نقاط سیال یکسان باشد. حال اگر سرعت جریان سیال از نقطه‌ای به نقطه دیگر در لحظه معین تغییر کند، جریان حاصل را غیریکنواخت می‌نامند. اگر ∂x معرف تغییر مکان یک ذره سیال در جهت دلخواه x باشد، در آن صورت می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{جریان یکنواخت است.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0 \rightarrow \text{جریان غیریکنواخت است.}$$

تغییرات سرعت یک ذره سیال در جهت دلخواه x را در لحظه معین نشان می‌دهد ولی در مورد تغییرات سرعت در زمان چیزی نمی‌گوید.

جریان مایع در یک لوله مستقیم با سطح مقطع ثابت، یکنواخت است، در حالی که اگر لوله خمیده بود و یا سطح مقطع متغیری داشت، جریان غیریکنواخت می‌شد.



(الف) سطح شیبدار (ب) سطح افقی (ج): جریان در مسیر تنگ شونده (د): حرکت گردابی

شکل ۳-۱ (الف) و (ب) نمایش جریان یکنواخت (ج) و (د) نمایش جریان‌های غیریکنواخت

۳-۲-۲ جریان آرام^۳ (لایه‌ای یا ورقه‌ای) و درهم (جریان آشفته)^۴

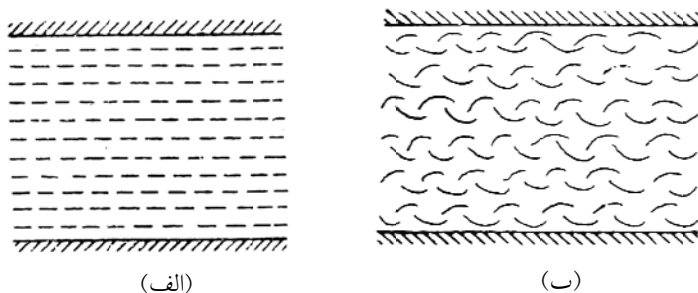
جریانی که در آن ذرات سیال مسیرهای منظم و همواری را طی می‌کنند و لایه‌های سیال به آرامی بر روی لایه‌های مجاور خود می‌لغزند. جریان آرام از قانون لزجت نیوتن $\tau = \eta \frac{dV}{dy}$ و یا تعمیم آن قانون لزجت استوکس پیروی می‌کند. در این نوع جریان هر گونه گرایشی به آشفته‌گی توسط لزجت سیال مستهلک می‌شود.

1. Uniform Flow
2. Non-Uniform Flow
3. Laminar Flow
4. Turbulent Flow

جریان آشفته جریانی است که در آن هر ذره سیال دارای مسیر مشخصی نیست و مسیرهای ذرات مستقل یکدیگر را قطع می‌کنند. و در کارهای مهندسی اغلب جریان‌ها آشفته هستند برای مثال جریان آب در یک رودخانه جریان آشفته است. در جریان آشفته داریم:

$$\tau = (\mu + \eta) \frac{dV}{dy} \quad (۱-۳)$$

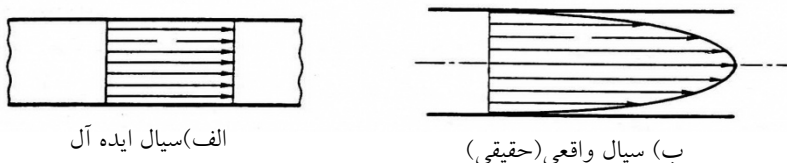
که η لزجت گردابی بوده و بر خلاف لزجت (μ) تنها یک خاصیت سیال نیست بلکه به میزان آشفتگی جریان هم وابسته است.



شکل ۳-۲ (الف) نمایش جریان آرام (ب) نمایش جریان آشفته

۳-۲-۳ جریان ایده‌آل^۱ و واقعی (حقیقی)

سیال ایده‌آل سیال فرضی است که لزجت و قابلیت تراکم آن صفر باشد. گرچه بسیاری از مایعات را می‌توان عملاً غیر قابل تراکم در نظر گرفت ولی تمام سیالات اعم از مایعات یا مایعات، لزجت دارند. درحقیقت هیچ گاه سیال ایده‌آلی وجود ندارد، اما برای بیان فرمول‌های خاص، می‌توان ابتدا سیال را ایده‌آل در نظر گرفت و پس از اینکه معادله مربوط به این نوع سیالات به دست آمد، آن را برای سیالات واقعی (حقیقی) تعمیم داد. در یک سیال ایده‌آل به علت نبود لزجت، قشرهای مختلف سیال به موازات هم و با سرعت ثابت در حرکتند در صورتی که در مورد سیالات واقعی، به علت وجود لزجت، سرعت قشرهای مختلف سیال با هم متفاوت است. بنابراین تفاوت اصلی سیالات ایده‌آل و واقعی در لزجت آنهاست. (شکل ۳-۳)



شکل ۳-۳ الف) سیال ایده آل و ب) سیال واقعی [۱]

۳-۲-۴ جریان دائمی^۱ (پایداریا ماندگار) و جریان غیردائمی^۲ (ناپایدار)

جریانی که در آن خواص سیال در هر نقطه نسبت به زمان تغییر نمی کند، راجریان دائمی (پایدار) می نامند. این نوع جریان می تواند یکنواخت و یا غیریکنواخت باشد. بنابراین در جریان پایدار تمام خواص سیال نظیر جرم مخصوص، فشار، سرعت، درجه حرارت و فشار در هیچ نقطه ای، تغییری نسبت به زمان رخ نخواهد داد.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

همچنین اگر در حالتی که مشخصات سیال در یک نقطه نسبت به زمان تغییر کند، جریان به نام غیر دائمی خوانده می شود.

برای مثال جریان آب خارج شده از یک شیر در مدت زمانی که شیر فلکه در حال چرخانده شدن است، یک جریان غیردائمی است و پس از آنکه شیر فلکه ثابت شد، جریان خروجی دائمی خواهد بود.

۳-۲-۵ جریان های تراکم پذیر^۳ و تراکم ناپذیر^۴

جریان های تراکم ناپذیر یا غیرقابل تراکم جریان هایی هستند که در آنها تغییرات جرم مخصوص قابل صرف نظر است و جریان های تراکم پذیر جریان هایی هستند که در آنها تغییرات جرم مخصوص قابل ملاحظه است.

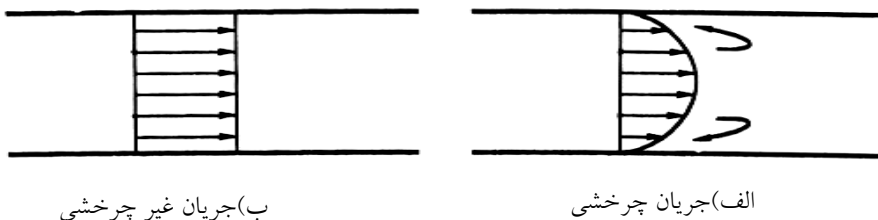
به طور کلی اغلب گازها قابل تراکم و تمام مایعات غیرقابل تراکم هستند. با این حال اگر مایع تحت فشار بالایی قرار گیرد تراکم پذیری باید منظور گردد و اگر

1. Steady Flow
2. Unsteady Flow
3. Compressible Flow
4. Incompressible Flow

تغییرات فشار ناچیز باشد، می‌توان گاز را تراکم ناپذیر فرض کرد.

۳-۲-۶ جریان‌های چرخشی^۱ و غیرچرخشی^۲

هرگاه ذرات سیال ضمن حرکت، حول مراکز خود در امتداد جریان دوران کنند، و در نتیجه سرعت زاویه‌ای ایجاد کنند جریان چرخشی را ایجاد می‌کنند. ولی اگر این ذرات بدون دوران با سرعت زاویه‌ای برابر با صفر به حرکت خود ادامه دهند، جریان غیر چرخشی به شمار می‌آیند. برای مثال جریان‌های با لزجت کم مانند جریان هوا در نواحی که گرادیان سرعت کم باشد غیر چرخشی می‌باشند. جریان در پشت ایر فویل‌ها مثالی از جریان چرخشی است.



شکل ۳-۴ جریان‌های چرخشی و غیر چرخشی

۳-۲-۷ جریان‌های یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

در حالت کلی جریان‌ها سه بعدی هستند. در این جریان مولفه‌های سرعت تابعی از مختصات مکانی x ، y و z و زمان t هستند، تجزیه و تحلیل جریان‌ها در حالت سه بعدی پیچیده است. مثل حرکت مغشوش آب در رودخانه‌ها جریان یک بعدی جریانی است که در آن تغییرات سرعت و فشار و... در جهت عمود بر جریان صرفنظر می‌گردد و شرایط هر مقطع برحسب مقادیر متوسط بیان می‌شود. برای مثال می‌توان جریان لوله را یک بعدی در نظر گرفت.

جریان دو بعدی جریانی است که هریک از مشخصات جریان، در یکی از جهات ثابت باشد و در دو جهت دیگر تغییر کند، آن جریان دو بعدی خواهد بود. در این نوع جریان، خطوط جریان در یک سطح قرار دارند و در جهت عمود بر این سطوح جریانی

وجود ندارد. حرکت آب از بالای سرریزها یا جریان در کانالهای آزمایشگاهی را می‌توان از این نوع دانست.

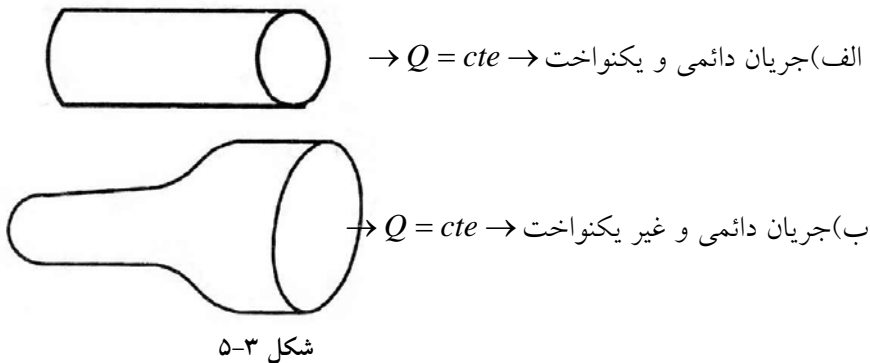
برای روشن تر شدن مسئله می‌توان مثالهای زیر را ذکر کرد:

(الف) جریان یکنواخت پایدار: حالتی که مایعی در یک لوله طویل مستقیم با شدت جریان ثابت در حرکت باشد. شکل الف (۳-۵)

(ب) جریان یکنواخت ناپایدار: حالتی که مایعی در یک لوله طویل مستقیم با شدت جریان متغیر در حرکت باشد.

(ج) جریان غیریکنواخت پایدار: حالتی که مایعی در لوله‌ای با مقطع متغیر و با شدت جریان ثابت در حرکت باشد. شکل ب (۳-۵)

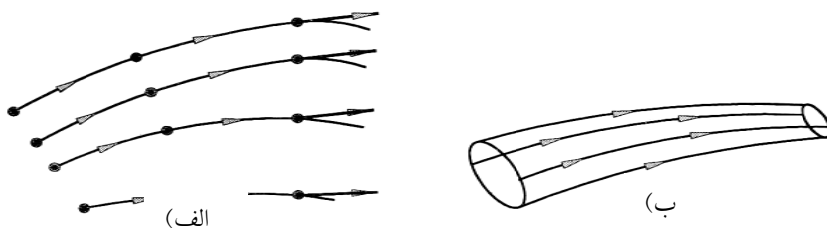
(د) جریان غیریکنواخت ناپایدار: حالتی که مایعی در لوله‌ای با مقطع متغیر و با شدت جریان متغیر در حرکت باشد.



۳-۳ خطوط جریان

خط جریان خط پیوسته فرضی است که در تمام نقاط، مولفه سرعت بر آن مماس است و جهت بردار سرعت را در هر نقطه نشان می‌دهد. همچنین به فضایی که در برگیرنده تعدادی خطوط جریان است لوله جریان گفته می‌شود.

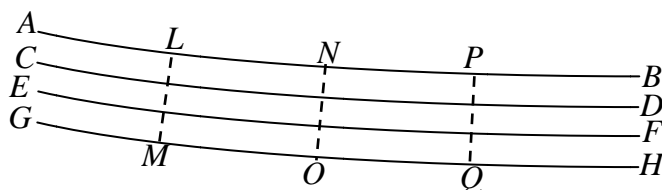
هر چقدر خطوط جریان بهم نزدیکتر باشند سرعت بیشتر و در نتیجه میزان جریان نیز بیشتر خواهد بود و برعکس.



شکل ۳-۶ (الف) نمایش خطوط جریان (ب) نمایش لوله جریان

۳-۴ خطوط پتانسیل یا خطوط هم پتانسیل

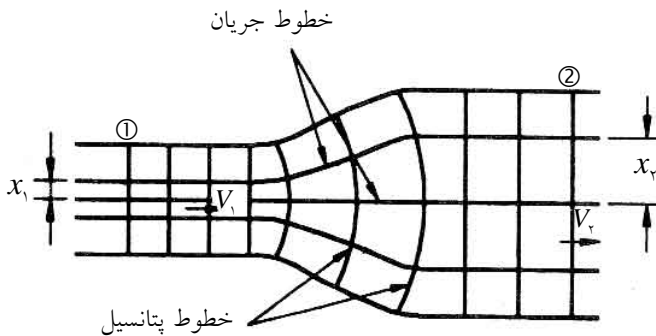
می‌دانیم ذرات سیال هنگام حرکت در امتداد خطوط جریان همیشه مقداری از انرژی خود را از دست می‌دهند. اگر نقاط هم پتانسیل واقع بر خطوط جریان را بهم متصل کنیم خطوط پتانسیل یا خطوط هم پتانسیل حاصل می‌شوند. محل تداخل خطوط جریان و هم پتانسیل عمود برهم و دارای زاویه 90° می‌باشد. در شکل (۳-۷) خط AB، CD، EF و GH و خطوط جریان و PQ, NO, LM خطوط پتانسیل هستند.



شکل ۳-۷ خطوط جریان و خطوط پتانسیل

۳-۵ شبکه جریان

شبکه جریان از رسم خطوط جریان و خطوط عمود بر آنها یعنی خطوط هم پتانسیل به دست می‌آید. شبکه جریان در بررسی و تحلیل رفتار برخی پدیده‌های جریان که به سادگی توسط روابط ریاضی قابل مطالعه نیستند به کار برده می‌شود. چنین پدیده‌هایی از طریق ترسیم شبکه‌های جریان مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند. یک شبکه جریان می‌تواند از قطعات مربع شکل تشکیل شود، هر چند اگر شبکه به صورت واگرا یا همگرا یا منحنی شکل باشد، قطعات آن مربع شکل نخواهد بود.



شکل ۳-۸ خطوط جریان

۳-۶ روابط اساسی مکانیک سیالات

برای حل مسائل مکانیک سیالات به چند قانون اساسی احتیاج است که بون در نظر گرفتن ماهیت جریان، تمامی جریان‌ها از روابط زیر پیروی می‌کنند:

۱. قانون بقای جرم (معادله پیوستگی)
 ۲. قانون دوم نیوتن (معادله اندازه حرکت یا مومنتوم)
 ۳. معادله انرژی (قانون اول ترمودینامیک)
- بدیهی است برای حل مسائل همیشه به همه این قوانین احتیاجی نیست.

۳-۷ روش‌های اساسی تحلیل جریان

در حل مسائل مربوط به جریان، سه روش اساسی وجود دارد که اهمیت یکسانی دارند که عبارتند از تحلیل انتگرالی، تحلیل دیفرانسیلی و مطالعه آزمایشگاهی (تجربی) یا تحلیل ابعادی.

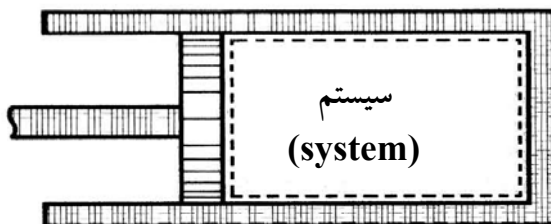
اولین قدم در حل یک مسئله تعریف سیستمی برای آن است. تعریف سیستم یا حجم کنترل در هر مسئله که در آن قوانین اساسی استفاده می‌شوند، اهمیت خاصی دارد.

۸-۳ مفاهیم سیستم، حجم کنترل

در به کار بردن قوانین جریان سیال، می توان از دو روش جرم مشخص و حجم مشخص (کنترل) استفاده کرد.

۸-۳-۱ روش سیستم^۱ (جرم مشخص)

سیستم عبارت است از یک مقدار ثابت و مشخصی از جرم که توسط مرزهایش از محیط اطراف جدا می شود؛ مواد خارج از سیستم را محیط گویند. مرزهای سیستم ممکن است ثابت یا متحرک باشند ولی در هر حال جرمی از آن عبور نمی کند. سیستم بر حسب منظور ما می تواند شامل جرم کوچک و یا بزرگی از جامد و سیال باشد. بخار موجود در داخل یک سیلندر را که بوسیله پیستونی مسدود است، می توان به عنوان یک سیستم در نظر گرفت (شکل ۹-۳). در این مورد ممکن است با تغییر دما، حجم بخار تغییر کند و پیستون تغییر مکان دهد، ولی جرم بخار آن همواره ثابت باقی خواهد ماند.

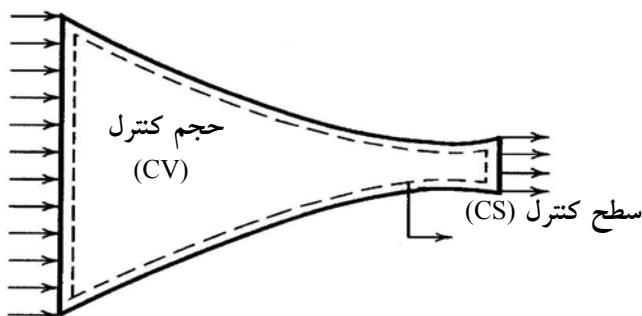


شکل ۹-۳ جرم مشخص یا سیستم (مجموعه سیلندر و پیستون)

۸-۳-۲ حجم کنترل^۲ (حجم مشخص)

حجم کنترل ناحیه ای از فضای بررسی سیال است که دارای حجم ثابت است ولی جرم سیال ممکن است ثابت یا متغیر می باشد. به عبارت دیگر جرم و جنس ماده داخل حجم کنترل ممکن است در طی زمان تغییر کند ولی شکل حجم کنترل همیشه ثابت باقی می ماند. حجم کنترل انتخابی است ولی آن را معمولاً به مرزهای صلب منطبق می گیرند. مرزهای حجم کنترل را سطح کنترل (C. S) گویند.

به عنوان مثال در جریان سیالات از شپورها می توان قسمتی از سیال را مطابق شکل (۳-۱۰) به عنوان حجم کنترل در نظر گرفت و حرکت آن را مطالعه کرد. در به کار بردن قوانین جریان سیال، می توان از هر دو روش سیستم و حجم کنترل استفاده کرد.



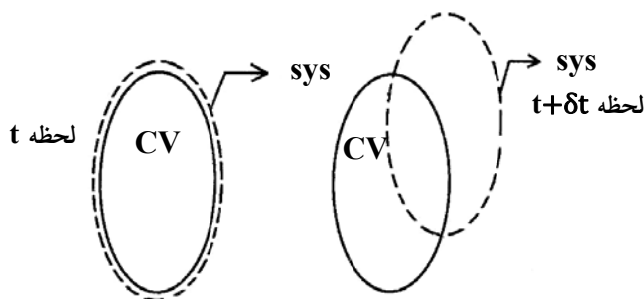
شکل ۳-۱۰ حجم کنترل و سطح کنترل

نکته: در مطالعه اجسام صلب، روش جرم مشخص بکار می رود زیرا در این حالت می توان به آسانی جسم صلب را مشخص کرد و آن را به طور جداگانه مورد بررسی قرار داد ولی در مکانیک سیالات که با تعداد بیشماری از ذرات سیال مواجه هستیم، روش حجم کنترل ترجیح داده می شود.

۳-۹ معادله انتقال رینولدز

برای آنکه صورت حجم کنترلی قوانین اصلی را از روی صورت سیستمی آنها به دست آوریم، از معادله انتقال رینولدز استفاده خواهیم کرد.

خاصیتی از سیال مانند جرم، انرژی یا مومنتم (اندازه حرکت) را در نظر می گیریم و مقدار این خاصیت در داخل سیستم در لحظه t را با N نشان می دهیم. مقدار این خاصیت بر واحد جرم سیال را نیز با η نشان می دهیم. حال فرض می کنیم که مطابق شکل (۳-۱۱) در لحظه t ، سیستم (جرم مشخص) در داخل حجم کنترل CV (حجم مشخص) قرار دارد. بدیهی است که در لحظه $t + \delta t$ دیگر سیستم بر حجم کنترل منطبق نیست.



شکل ۱۱-۳

معادله انتقال رینولدز بیان می‌دارد که نرخ افزایش N در داخل سیستم برابر است با نرخ افزایش N در داخل حجم کنترل بعلاوه نرخ خالص خروجی^۱ N از سطح کنترل.

بیان فوق به صورت ریاضی به شکل زیر نمایش داده می‌شود. (سرعت V = حجم \forall)

$$\left(\frac{dN}{dt} \right)_{system} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho d\forall + \int_{CS} \eta \rho V \cdot dA \quad (۲-۳)$$

که در آن $\eta = \frac{N}{m}$ و N یک خاصیت گسترده (مانند جرم، انرژی یا مومنتم) سیستم است.

روش سیستم را که در واقع حرکت ذرات را دنبال می‌کند روش تحلیل لاگرانژی گویند و روش حجم کنترل را که در واقع به مشاهده جریان از یک چارچوب متصل به حجم کنترل می‌نشیند، روش تحلیل اولری می‌گویند.

۱۰-۳ معادلات پیوستگی، انرژی و مومنتم

در این بخش اصول بقای جرم، مومنتم و انرژی را ابتدا برای سیستم بیان کرده، سپس با استفاده از معادله انتقال رینولدز آنها را برای حجم کنترل به دست می‌آوریم. کاربرد معادلات حاصله را در بخش‌های آینده شرح خواهیم داد.

۱-۱۰-۳ معادله پیوستگی

این رابطه که در حقیقت بیان دیگری از قانون کلی اصل بقاء ماده است، در عین سادگی

۱. منظور از «خالص خروجی» خروجی منهای ورودی است.

یکی از قوانین مهم مکانیک سیالات است که در اکثر موارد از آن استفاده می‌شود. اصل بقای جرم (معادله پیوستگی) بیان میکند که جرم یک سیستم در طی زمان تغییر نمی‌کند بنابراین اصل بقای جرم برای سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3-3)$$

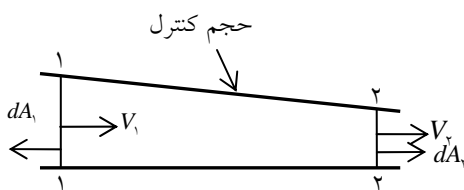
که m کل جرم سیستم است. حال در معادله انتقال رینولدز به جای N ، جرم سیستم یعنی m را قرار می‌دهیم. بدیهی است در این حالت η جرم واحد جرم یعنی ۱ خواهد شد.

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho V \cdot dA = 0 \quad (3-4)$$

معادله فوق، معادله پیوستگی نام دارد و بیان می‌کند که نرخ افزایش جرم داخل حجم کنترل بعلاوه نرخ خالص خروجی جرم از حجم کنترل صفر است.

دبی جریان (نرخ آبدهی یا شدت جریان)

ابتدا جریان دائمی در یک لوله جریان را بررسی می‌کنیم. مطابق شکل (۳-۱۲) قسمتی از یک لوله جریان را به عنوان حجم کنترل در نظر می‌گیریم. سطح کنترل از سه بخش تشکیل شده است؛ دیواره لوله جریان، سطح ادر مقطع ورودی و سطح ۲ در مقطع خروجی.



شکل: ۳-۱۲

چون جریان دائمی است، اولین جمله معادله (۳-۴) صفر است. بنابراین داریم:

$$\int_{CS} \rho V \cdot dA = 0 \quad (3-5)$$

معادله فوق بیان می‌کند که دبی جرمی خالص خروجی از سطح کنترل صفر است.

دبی جرمی خالص خروجی از مقطع ۱ برابر $\rho_1 V_1 \cdot dA_1 = -\rho_1 V_1 \cdot dA_1$ از مقطع ۲

برابر $\rho_1 V_1 dA_1 = \rho_2 V_2 dA_2$ و از مقطع دیواره لوله جریان صفر است. لذا برای جریان دائمی در یک لوله جریان، معادله پیوستگی بین دو مقطع به صورت زیر بیان می شود:

$$\dot{m} = \rho_1 V_{av1} A_1 = \rho_2 V_{av2} A_2 \quad (۳-۶)$$

که \dot{m} دبی جریان و عبارت است از جرم سیال گذرنده از یک مقطع در واحد زمان است. واحد دبی جرمی در سیستم SI، kg/s و در واحد انگلیسی lbm/s است.

سرعت متوسط در یک مقطع با رابطه زیر بیان می شود:

$$V_{av} = \frac{1}{A} \int v dA \quad (۳-۸)$$

دبی حجمی یا به اختصار، دبی، Q عبارت است از حجم سیال گذرنده از یک مقطع در واحد زمان و به صورت زیر بیان می شود:

$$Q = \int V \cdot dA = AV_{av} \quad (۳-۹)$$

در معادله فوق A سطح مقطع مجرا و V_{av} سرعت متوسط جریان در این مقطع است.

واحد دبی حجمی در سیستم m^3/s و در سیستم انگلیسی ft^3/s است.

لذا معادله پیوستگی به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\dot{m} = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \quad (۳-۱۰)$$

برای جریان تراکم ناپذیر داریم:

$$Q = AV_1 = AV_2 \quad (۳-۱۱)$$

نکته ۱: اگر دبی حجمی را با Q دبی وزنی را با Q_w و دبی جرمی را با \dot{m} نشان دهیم، در آن صورت خواهیم داشت:

$$Q_w = \gamma Q = g \dot{m} \quad (۳-۱۲)$$

$$\dot{m} = \rho Q$$

نکته ۲: برای محاسبه دبی حجمی از رابطه $Q = AV$ استفاده می شود است. واحد

دبی حجمی در سیستم m^3/s و در سیستم انگلیسی ft^3/s است

نکته ۳: برای محاسبه دبی وزنی از رابطه $Q_w = \gamma AV = \gamma Q$ استفاده می شود.

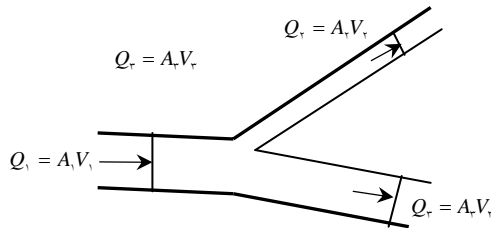
واحد Q_w در سیستم متریک $\frac{N}{s}$ و در سیستم انگلیسی $\frac{lb}{s}$ است.

نکته ۴: برای محاسبه دبی جرمی از رابطه $Q_w = \rho AV = \rho Q$ استفاده می شود.

واحد Q_m در سیستم متریک $\frac{kg}{s}$ و در سیستم انگلیسی $\frac{slug}{s}$ است.

به طور کلی می توانیم معادله پیوستگی را به صورت زیر بنویسیم:

کل جریان خروجی از اتصال = کل جریان ورودی به اتصال $\Rightarrow \sum Q_{in} = \sum Q_{out}$
 با توجه به شکل (۳-۱۳) داریم:



شکل ۳-۱۳ معادله پیوستگی

و در این حالت:

$$\sum (\dot{m})_{in} = \sum (\dot{m})_{out} \quad (۳-۱۳)$$

کل جریان خروجی از اتصال = کل جریان ورودی به اتصال $\Rightarrow \sum Q_{in} = \sum Q_{out}$

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 + \rho_3 Q_3$$

و به عبارت دیگر برای سیالات تراکم ناپذیر (ثابت $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$) داریم:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \text{یا} \quad A_1 V_1 = A_2 V_2 + A_3 V_3$$

و در حالت کلی بایستی در هر اتصال $\sum_{i=1}^n \rho_i Q_i = 0$ باشد. جریان ورودی به

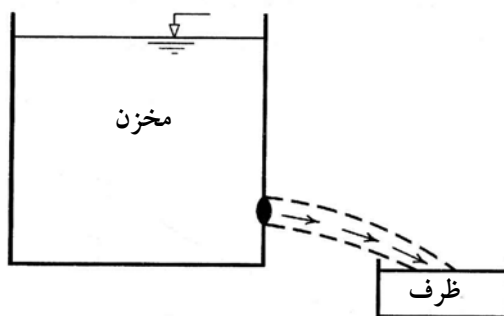
اتصال را مثبت و جریان خروجی از اتصال را منفی در نظر می گیریم.

مثال ۳-۱: در یک مخزن بزرگ مطابق شکل زیر، روزه ای تعبیر شده است که

آب را با سرعت ثابت تخلیه می کند به طوری که آب تخلیه شده، ظرفی به حجم ۱۲۰۰

لیتر را در مدت یک دقیقه پر می کند. مطلوب است تعیین دبی حجمی، دبی وزنی و

دبی جرمی آب خروجی از مخزن؟



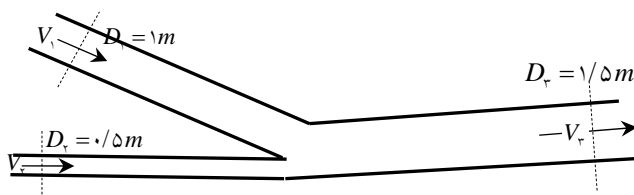
شکل ۳-۱۴

$$\begin{aligned} \text{دبی حجمی} &= \frac{\text{حجم آب موجود در ظرف}}{\text{زمان}} = \frac{1200}{60} = 20 \frac{\text{lit}}{\text{s}} = 0.02 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ \text{دبی وزنی} &= \frac{\text{وزن آب موجود در ظرف}}{\text{زمان}} = \frac{9806 \times 1200 \times 10^{-3}}{60} = 196/12 \frac{\text{N}}{\text{s}} \\ \text{دبی جرمی} &= \frac{\text{جرم آب موجود در ظرف}}{\text{زمان}} = \frac{1000 \times 1200 \times 10^{-3}}{60} = 20 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

مثال ۳-۲: اگر در جریان آبی، دبی عبوری از یک مقطع برابر $20 \frac{\text{lit}}{\text{s}}$ باشد، دبی وزنی و دبی جرمی آب عبوری از آن مقطع را به دست آورید؟
هر گاه کلمه دبی به تنهایی بکار برده می شود، منظور دبی حجمی است، چون در اغلب کارهای مهندسی از دبی حجمی استفاده می شود.

$$\begin{aligned} Q &= \gamma Q = 9806 \times 0.02 = 196/12 \frac{\text{N}}{\text{s}} \\ \dot{m} &= \left(\frac{\gamma}{g} \right) Q = \rho Q = 1000 \times 0.02 = 20 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

مثال ۳-۳: دو لوله یکی به قطر 0.05 m و دیگری به قطر 1 m مطابق شکل زیر به یک لوله بزرگتر به قطر $1/5 \text{ m}$ متصل شده اند. درون سیستم لوله ها، نفت با دانسیته $880 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ جریان دارد. اگر دبی جرمی در بزرگترین مقطع برابر $4000 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$ و سرعت دو مقطع کوچکتر با هم برابر باشند، سرعت جریان در هریک از لوله را به دست آورید؟



شکل ۱۵-۳

$$\dot{m} = \rho AV \rightarrow 4000 = 880 \times \left(\frac{\pi \times 1/5^2}{4} \right) \times V_2 \rightarrow V_2 = 2/57 \frac{m}{s}$$

جرم مخصوص نفت در تمام لوله‌ها برابر مقدار ثابت $880 \frac{kg}{m^3}$ می‌باشد، بنابراین جریان تراکم‌ناپذیر است و می‌توان معادله پیوستگی آن را در انشعاب مربوطه به صورت زیر نوشت:

کل جریان خروجی از اتصال = کل جریان ورودی به اتصال

$$\sum Q_{in} = \sum Q_{out}$$

$$A_1 V_1 + A_2 V_2 = A_3 V_3 \rightarrow d_1^2 V_1 + d_2^2 V_2 = d_3^2 V_3$$

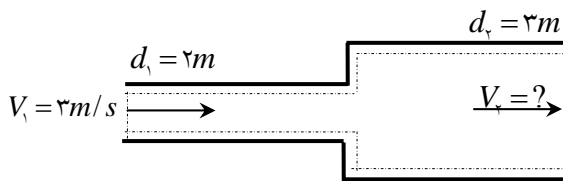
$$\xrightarrow{V_1 = V_2} V_1 \times (0.5^2 + 1^2) = 1/5^2 \times 2/57 \rightarrow$$

$$V_1 = V_2 = 4/63 \frac{m}{s}$$

مثال ۳-۴: یک لوله انتقال آب در شکل (۱۶-۳) نشان داده شده است. در مقطع

(۱) قطر لوله $2m$ و سرعت جریان $3m/s$ است. دبی را تعیین کنید. در مقطع (۲) قطر

لوله $3m$ است. سرعت در مقطع (۲) را به دست آورید؟



شکل ۱۶-۳ حجم کنترل برای خط انتقال آب

حل: ابتدا دبی را به دست می‌آوریم:

$$Q = AV_1 = \frac{\pi (2)^2}{4} = 9/42 \frac{m^3}{s}$$

و سپس سرعت در مقطع ۲ را حساب می‌کنیم:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{9/42}{2/25\pi} = 1/33 \frac{m}{s}$$

در مطالعه جریان‌های دو بعدی از فرم دیفرانسیلی معادله پیوستگی استفاده می‌شود.

مثال ۳-۵: آب در لوله به قطر ۱۰۰ mm و با سرعت $10 \frac{m}{s}$ جریان دارد. دبی آب را برحسب لیتر بر ثانیه حساب کنید. همچنین سرعت آب را در صورتی که قطر لوله به تدریج تا ۲۰۰ mm تغییر کند، در انتهای لوله محاسبه کنید؟
حل:

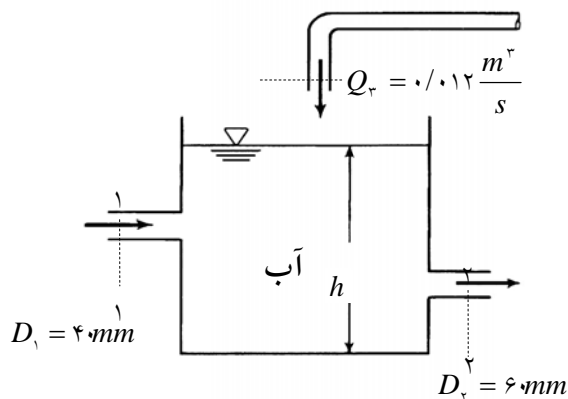
$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4} \times (0/1)^2 = 7/854 \times 10^{-3} m^2$$

$$Q_1 = A_1 V_1 = (7/854 \times 10^{-3}) \times 10 = 78/54 \times 10^{-3} \frac{m^3}{s} = 78/54 \frac{lit}{s}$$

برای محاسبه سرعت آب در انتهای لوله آن را به V_2 نشان داده و می‌نویسیم:

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\frac{\pi (d_2)^2}{4}} \Rightarrow V_2 = \frac{78/54 \times 10^{-3}}{\frac{\pi (0/2)^2}{4}} = 2/5 \frac{m}{s}$$

مثال ۳-۶: مخزن آبی مطابق شکل از طریق مقطع ۱-۱ با سرعت $V_1 = 5 \frac{m}{s}$ و از طریق مقطع ۳-۳ با دبی $Q_3 = 0/012 \frac{m^3}{s}$ در حال پر شدن است اگر سطح آب در مخزن (h) ثابت باشد، سرعت خروجی در مقطع ۲-۲ چقدر خواهد بود؟



شکل ۳-۱۷

$$\begin{aligned}
 Q_1 + Q_2 &= Q_3 \\
 \left[\frac{\pi (0.04)^2}{4} \right] \times 5 + 0.012 &= Q_3 \\
 Q_3 &= 0.01828 \text{ m}^3/\text{s} \\
 V_3 &= \frac{Q_3}{A_3} = \frac{0.01828}{\frac{\pi (0.06)^2}{4}} \Rightarrow V_3 = 6.47 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

۳-۱۰-۲ معادله مومنتوم (اندازه حرکت)

اهمیت معادله اندازه حرکت (مومنتوم) زمانی آشکار می شود که بخواهیم به طور مثال نیرویی که از طرف آب در حال حرکت به یک جسم مانند یک سرریز، زانوی لوله و یا پایه یک پل وارد می شود، محاسبه کنیم. زیرا دانستن نیروهایی که سیالات در حال حرکت به محیط پیرامون خود وارد می کنند در طراحی سازه ضرورت پیدا می کند. از آن جایی که در معادله پیوستگی و معادله برنولی، عامل نیرو وجود ندارد، در بعضی موارد به معادله دیگری نیاز است تا بتوان به کمک آن نیروهای دینامیکی را محاسبه کرد. این معادله به معادله اندازه حرکت معروف است و در به دست آوردن آن از قانون دوم نیوتن استفاده می گردد.

$$\sum F = ma = m \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(mV) \quad (۳-۱۴)$$

حال اگر در معادله انتقال رینولدز به جای خاصیت N ، مومنتوم سیستم یعنی mV را قرار دهیم، در آن صورت بجای η نیز بایستی مومنتوم بر واحد جرم یعنی V را قرار دهیم.

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \eta \rho dV + \int_{CS} \eta \rho V \cdot dA = 0$$

از طرف دیگر $\frac{dN}{dt} = \frac{d}{dt}(mV) = \sum F$ خواهد شد. پس در نهایت معادله انتقال رینولدز به صورت زیر در می آید:

$$\sum F = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} V \rho dV + \int_{CS} V \rho V \cdot dA \quad (۳-۱۵)$$

رابطه فوق فرم کلی معادله مومنتوم خطی برای حجم کنترل است و بیان می دارد

که برآیند نیروهای خارجی وارد بر حجم کنترل برابر است با نرخ افزایش مومنتوم در داخل حجم کنترل، به علاوه نرخ خالص خروج مومنتوم از حجم کنترل.

توجه کنید که در این حالت $\sum F_{sys} = \sum F_{cv}$ است زیرا در لحظه t حجم کنترل و سیستم بر هم منطبق‌اند. حال اگر جریان دائمی باشد، در آن صورت خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} V \rho dV = 0 \rightarrow \sum F = \int_{cs} V \rho V \cdot dA$$

در این حالت برآیند نیروهای خارجی وارد بر حجم کنترل برابر است با نرخ خالص خروج مومنتوم از سطح کنترل که اگر جریان یک بعدی و سرعت برحسب مقدار متوسط (V) باشد، در آن صورت می‌توان نوشت:

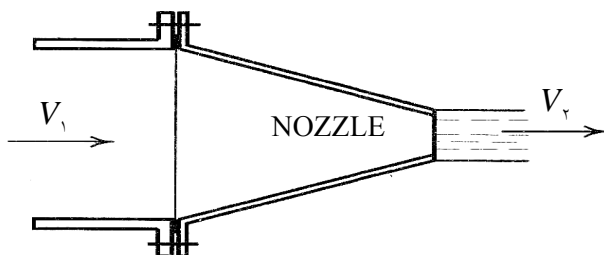
$$\sum F = (V \rho Q)_{out} - (V \rho Q)_{in} = (\rho Q V)_{out} - (\rho Q V)_{in}$$

با به کار گیری رابطه فوق برای یک لوله جریان می‌توان نوشت:

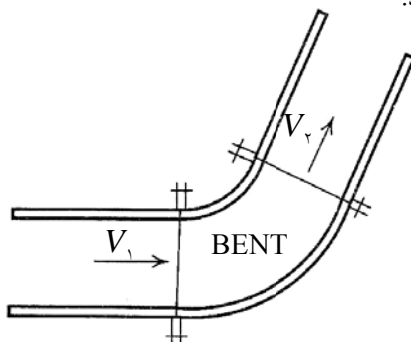
$$\begin{aligned} \sum F &= \rho_r Q_r V_r - \rho_1 Q_1 V_1 \xrightarrow[\rho_1 Q_1 = \rho_r Q_r]{\text{جریان دائمی}} \sum F = \rho Q (V_r - V_1) \\ &= \sum F = \dot{m} (V_r - V_1) \end{aligned} \quad (۱۶-۳)$$

نکته: از آنجائیکه سرعت یک کمیت برداری است بایستی در به کارگیری معادله مومنتوم اندازه و جهت آن لحاظ شوند. طبق اندازه حرکت که بیان می‌دارد مجموع نیروها در یک سیستم برابر با تغییرات اندازه حرکت است، نیرو می‌تواند در اثر یکی از حالات‌های زیر و یا ترکیبی از آن‌ها اتفاق بیفتد، که عبارتند از:

الف) تغییر در اندازه سرعت: یک مثال عملی از این حالت لوله مستقیمی است که در امتداد محور خود با کاهش قطر (کم شدن مساحت) مواجه شده است. در این حالت با کاهش مساحت مقطع سرعت جریان در لوله در لوله افزایش می‌یابد.

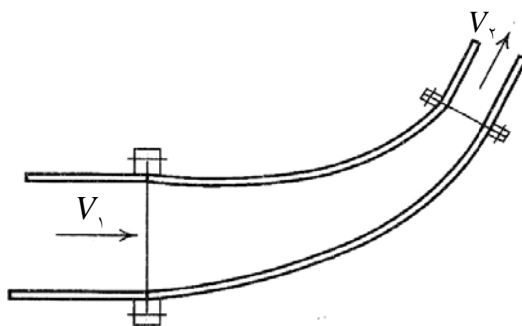


ب) تغییر در جهت سرعت: مثال عملی این حالت لوله‌ای با قطر ثابت است که تحت زاویه مشخصی خم شده است. این خم شدگی سبب می‌شود تا جهت سرعت جریان در لوله تغییر کنند.



شکل ۱۹-۳

ج) تغییر در اندازه و جهت سرعت: این حالت ترکیبی از دو وضعیت قبلی است که در لوله تغییر سطح مقطع و خم شدگی توأم وجود دارند. زانویی (خم) کاهنده مثالی عملی برای این حالت است.



شکل ۲۰-۳

مثال ۷-۳: از درون لوله‌ای به قطر ۳۰ سانتیمتر، آب با سرعت متوسط ۱/۵ متر در ثانیه، در جریان است. اگر در قسمتی از لوله قطر به‌طور ناگهانی به ۱۵ سانتیمتر کاهش یابد، نیرویی را که سبب افزایش سرعت در این قسمت از لوله شده است محاسبه کنید؟
حل: شدت جریان‌های حجمی و جرمی آب در لوله به شرح زیر است:

$$Q = A\bar{V} = \frac{\pi}{4}(30)^2 \times 1/5 \times 100 = 106028 \text{ cm}^3/\text{s}$$

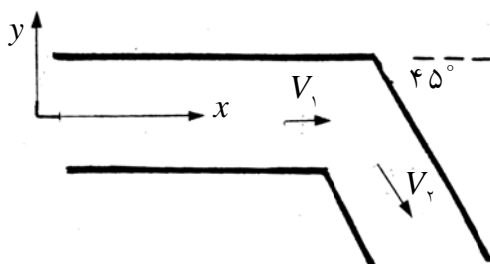
$$\dot{m} = Q\rho = 106028 \times 1 = 10628 \text{ gr/s}$$

$$V_1 = 150 \text{ cm/s} \quad A_1V_1 = A_2V_2 \quad \text{و} \quad V_2 = \frac{\frac{\pi}{4}(30)^2 \times 150}{\frac{\pi}{4}(15)^2} = 600 \text{ cm/s}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 600 - 150 = 450 \text{ cm/s}$$

$$F = \dot{m}\Delta V = 106028 \times 450 = 47712937 \text{ dyne} = 477/1 \text{ N}$$

مثال ۳-۸: امتداد یک لوله افقی به قطر ۳۰ سانتیمتر که در آن آب با سرعت ۳ متر در ثانیه در جریان است، به وسیله یک زانویی ۴۵ درجه، تغییر کرده است. اگر محور Xها را در جهت خطوط جریان اولیه لوله و محور Yها را عمود بر آن در نظر گیریم، مولفه‌های F_x و F_y را که در زانویی بر آب اثر می‌کند، محاسبه کنید؟ (شکل ۳-۲۱)



شکل ۳-۲۱

حل: شدت جریان‌های حجمی و جرمی آب در لوله به شرح زیر است:

$$Q = AV_m = \frac{\pi}{4}(30)^2 \times 3 \times 100 = 212057 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$Q\rho = 212057 \times 1 = 212057 \text{ gr/s}$$

در ورود آب به زانویی داریم:

$$V_x = 3 \text{ m/s} = 300 \text{ cm/s}$$

و در خروج آب از زانویی خواهیم داشت:

$$V_x = V_y = 3 \times \cos 45 = 3 \times 0.707 = 2.12 \text{ m/s} = 212 \text{ cm/s}$$

$$\Delta V_x = 300 - 212 = 88 \text{ cm/s}$$

$$\Delta V_y = 0 - 212 = -212 \text{ cm/s}$$

$$F_x = \dot{m} \Delta V_x = 212.57 \times 88 = 18661.016 = 186 \text{ N}$$

$$F_y = \dot{m} \Delta V_y = 212.57 \times (-212) = -44950 \text{ N}$$

هر یک از این مولفه‌ها در جهت مولفه شتاب مربوط به خود، اثر می‌کنند. نیروی کلی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(186)^2 + (-449.5)^2} = 485.6 \text{ N}$$

۳-۱۰-۳ معادله انرژی

معادله انرژی بیان می‌کند که نرخ حرارت ورودی منهای نرخ کارخروجی از حجم کنترل برابر است با نرخ افزایش انرژی داخلی حجم کنترل بعلاوه نرخ خالص انرژی از حجم کنترل، که به این صورت بیان می‌شود:

$$\frac{\delta Q_H}{\delta t} - \frac{\delta W_s}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho e dV + \int_{CS} \left(\frac{p}{\rho} + e \right) \rho V \cdot dA \quad (3-17)$$

به‌طور کلی می‌توان گفت که جمع انرژی یک سیال ایده‌آل به سه صورت انرژی پتانسیل، فشاری و جنبشی است. انرژی‌های پتانسیل و جنبشی در مورد اجسام جامد نیز وجود دارد ولی انرژی فشاری از مشخصات اختصاصی سیالات است. در طول حرکت یک سیال ایده‌آل، این سه نوع انرژی ممکن است به هم تبدیل شوند، ولی در هر صورت، جمع آنها همواره مقدار ثابتی خواهد بود.

۳-۱۱-۳ معادله اولر

اولر برای اولین بار قانون نیوتن را در حرکت ذرات سیال به کار برد، برای بررسی، اولر یک حجم کوچک استوانه‌ای شکل از سیال را در نظر گرفت و برای حالتی که این حجم تحت اثر نیروهای فشار و وزن با شتابی برابر a_s در حال حرکت است معادله نیوتن را نوشت. (توجه کنید که این حجم در راستای جهت حرکت ذرات در نظر گرفته شده است).

معادله اولر با توجه به سه فرض (۱) جریان بی‌اصطکاک (۲) جریان دائمی (۳) تغییرات در امتداد خط جریان، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dP}{\rho} + g dz + V dV = 0 \quad (18-3)$$

۱۲-۳ معادله برنولی در مورد سیالات ایده‌آل

معادله برنولی یکی از اساسی‌ترین معادلات مکانیک سیالات است و به جرات می‌توان گفت که تاکنون رابطه‌ای به این مهمی، در این رشته بیان شده است. این رابطه اولین بار در سال ۱۷۳۸ توسط برنولی دانشمند سوئسی بیان و به نام وی موسوم شد.

معادله برنولی برای حالتی که جرم مخصوص ثابت است و با چهار فرض (۱) جریان بی‌اصطکاک (۲) تراکم‌ناپذیر (۳) جریان دائمی (۴) در طول یک خط جریان ثابت، با انتگرال‌گیری از معادله اولر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = cte \quad (19-3)$$

جملات معادله فوق معرف انرژی بر واحد جرم می‌باشد و واحد آنها متر-نیوتن بر کیلوگرم است. مقدار ثابت (cte) برای هر خط جریان ثابت بوده و اگر خط جریان تغییر کند، مقدار ثابت تغییر خواهد کرد.

فرم دیگر معادله برنولی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2} + gz = cte \quad (20-3)$$

جملات معادله فوق معرف انرژی بر واحد وزن است و واحد آنها متر-نیوتن بر نیوتن می‌باشد.

در رابطه برنولی سه عبارت به هم جمع شده‌اند که مجموع انرژی‌های فشاری، جنبشی و پتانسیل می‌باشد. هر یک از جملات معادله برنولی را می‌توان صورتی از انرژی دانست که به صورت هد انرژی درآمده‌اند و آنها را می‌توان بر حسب ارتفاع ستون سیال بیان نمود. z که انرژی پتانسیل بر واحد وزن است، ارتفاع هندسی نامیده

می‌شود. $\frac{P}{\gamma}$ که انرژی جریانی بر واحد وزن است، ارتفاع فشاری نامیده می‌شود. $\frac{V^2}{2g}$

که انرژی جنبشی بر واحد وزن است، ارتفاع سرعتی نامیده می‌شود.

برای سیال غیرقابل تراکم با جرم مخصوص ثابت معادله برنولی بدین صورت

می باشد:

$$Z_1 + \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = Z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} \rightarrow H_1 = H_2 \quad (21-6)$$

در این رابطه تمام اجزای فرمول از، جنس طول اند و بر حسب واحد (m) می باشند.

با افزایش هد انرژی فشاری، هد انرژی جنبشی کاهش می یابد، یعنی اینکه با هم رابطه عکس دارند.

با توجه به این که یکی از فرضیات معادله برنولی غیر لزج بودن سیال است، لذا از افتها که ریشه آن لزجت است، صرف نظر شده است. به همین دلیل برای تصحیح معادله برنولی، کاهش انرژی از تلفات وافتها به طرف دوم معادله برنولی ترم تلفات $(losses = \sum h_l)$ افزوده می شود و $(losses = \sum h_l)$ کلیه تلفات اعم از طول لوله، اتصالات و... را شامل می شود و معادله برنولی به شکل زیر نوشته می شود:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_l \quad (22-3)$$

$$\sum h_l = h_f + h_e$$

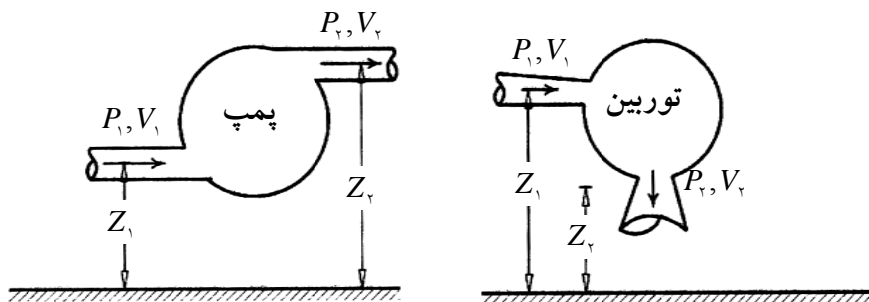
در رابطه فوق h_f تلفات اصطکاکی یا طولی و h_e تلفات موضعی می باشد.

از آنجا که رابطه برنولی را برای دو مقطع دلخواه و غیر مشخص ۱ و ۲ در نظر گرفتیم، لذا نتیجه می گیریم که ارتفاع کل H ، یعنی مجموع ارتفاع هندسی، ارتفاع فشاری و ارتفاع سرعتی، در تمام مقاطع مختلف یک سیال ایده آل تراکم ناپذیر مقدار ثابتی است. چنانچه مقدار انرژی در دو خط جریان متفاوت مد نظر باشد، مقادیر یکسانی برای H نخواهیم داشت. از طرفی مشخصی کردن خط جریان در مسائل نیز به طور دقیق ممکن نیست. لذا پیشنهاد می شود تا محور مرکزی لوله جریان^۱ به عنوان خط جریان در نظر گرفته شود و معادله برنولی بر روی نقاط واقع بر آن نوشته شود.

تفاوت رابطه برنولی در مورد سیالات ایده آل با سیال حقیقی یکی افت انرژی $\sum h_l$ ، و دیگری دخالت ضریب α ناشی از عدم غیر یکنواختی سرعتها در مقطع جریان است.

۱۳-۳ ماشین‌های هیدرولیکی

ماشین‌های هیدرولیکی (آبی) تأسیساتی هستند که با قرارگیری در مسیر جریان، باعث کاهش یا افزایش دبی جریان می‌شوند. اگر ماشین آبی مانند پمپ، انرژی خارجی در اختیار جریان قرار دهد و سبب افزایش انرژی سیال شود، به آن دهنده انرژی می‌گویند ولی چنانچه ماشین آبی مانند توربین، قسمتی از انرژی جریان را مصرف کند و باعث کاهش انرژی سیال شود، به آن گیرنده انرژی گفته می‌شود.



شکل ۲۲-۳

اگر در مسیر نقطه (۱) تا (۲) دستگاه‌هایی نظیر پمپ، توربین و یا هر دستگاه دیگری وجود داشته باشد، معادله برنولی نیاز به تصحیح دارد. دستگاه‌هایی نظیر پمپ که در آنها توان (انرژی) مصرف می‌شود، توان خود را به سیال داده و باعث افزایش انرژی می‌شود به همین دلیل طرف دوم معادله به اندازه هد انرژی دریافتی از پمپ (H_p)، نسبت به طرف اول معادله برنولی انرژی بیشتری دارد، لذا برای اینکه طرفین معادله برنولی توازن داشته باشند بایستی هد انرژی مصرفی بایستی از طرف دوم معادله برنولی کم شود. معادله برنولی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + H_p = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_l \quad (23-3)$$

در رابطه فوق H_p هد انرژی انتقال یافته است و $\sum h_l$ هد انرژی مصرفی در سیستم می‌باشد.

برای دستگامی نظیر توربین با توجه به اینکه توربین در مسیر سیال، انرژی سیال را گرفته و کار تولید می‌کند، لذا هد انرژی توربین (H_T) باید به طرف دوم معادله برنولی افزوده شود. داریم:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_l + H_T \quad (24-3)$$

۱۴-۳ محاسبه توان پمپ و توربین

در معادله برنولی هر جمله معرف انرژی در واحد وزن (ارتفاع نظیر انرژی) می‌باشد. هرگاه ارتفاع نظیر انرژی در دبی وزن سیال ضرب شود، حاصل برابر توان یا نرخ تبدیل انرژی خواهد بود.

$$P = \dot{m}gH = \rho gQH = \gamma QH \quad (25-3)$$

که در رابطه فوق پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

P : توان یا نرخ تبدیل انرژی و واحد آن ژول در ثانیه یا وات است.

γ : وزن مخصوص سیال برحسب $\frac{N}{m^3}$ در سیستم SI و $(\frac{lb}{ft^3})$ در سیستم

انگلیسی است.

Q : دبی جریان برحسب $\frac{m^3}{s}$ و $(\frac{ft^3}{s})$ در سیستم انگلیسی است.

H : ارتفاع نظیر انرژی برحسب m (ft در سیستم انگلیسی) است در واقع H می‌تواند هر ارتفاع لازم برای کسب توان موردنظر باشد. برای مثال برای محاسبه توان حاصل از یک توربین به جای H از H_T ، برای محاسبه توان یک جت به جای H از $\frac{V_j^2}{2g}$ که در آن V_j سرعت جت است و برای محاسبه توان تلف شده ناشی از اصطکاک سیال از h_f به جای H استفاده می‌شود.

۱۴-۳-۱ بازده η

وقتی توسط یک ماشین آبی به یک سیال توان منتقل شده (پمپ) یا بر عکس از آن توان گرفته شود (توربین)، افت بوجود می‌آید که ناشی از اصطکاک است. به دلیل این افت‌ها در یک پمپ، توان منتقل شده به سیال (قدرت سیال) همیشه

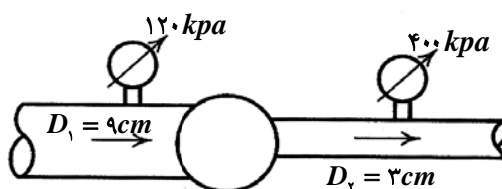
کمتر از توان ورودی محوراست براین اساس بازدهی یک پمپ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\eta_p = \frac{\text{توان خروجی}}{\text{توان ورودی به سیال}} \quad (۲۶-۳)$$

در یک توربین (که توان را از سیال به محور منتقل می کند) توان خروجی از محور همیشه کمتر از توان گرفته شده از سیال است بر این اساس بازدهی یک توربین به صورت زیر تعریف می شود:

$$\eta_T = \frac{\text{توان حاصل از توربین}}{\text{توان گرفته شده از سیال}} \quad (۲۷-۳)$$

مثال ۳-۹: در شکل زیر ارتفاع نظیر انرژی پمپ (H_p) را محاسبه کنید؟ دبی جریان $۲۰ \frac{\text{lit}}{\text{s}}$ است و از کلیه تلفات صرف نظر می شود.



شکل ۳-۲۳

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.02}{\left(\frac{\pi \times 0.09^2}{4} \right)} = 3.14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.02}{\left(\frac{\pi \times 0.03^2}{4} \right)} = 28.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_p = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

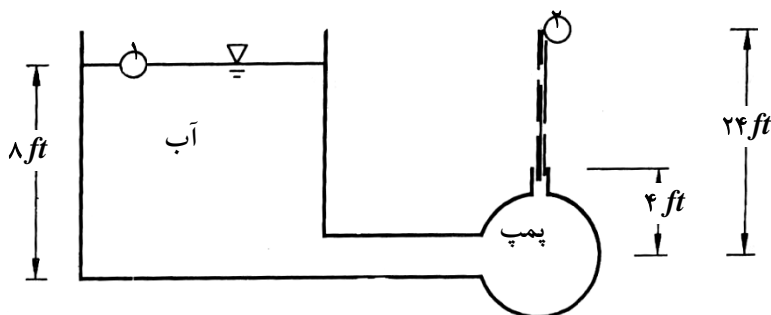
$$\rightarrow 0 + \frac{120}{9/81} + \frac{3.14^2}{2 \times 9.81} + h_p = 0 + \frac{400}{9/81} + \frac{28.3^2}{2 \times 9/81} \rightarrow H_p = 68/9 \text{ m}$$

مثال ۳-۱۰: اگر دبی جریان آب در یک لوله $10 \text{ m}^3/\text{s}$ و افت بار در یک طول ۱۰۰۰ متری از آن 20 m باشد، مقدار انرژی تلف شده ناشی از اصطکاک در این لوله را به دست آورید؟

حل:
$$h_L \gamma Q = 20(\text{m}) \times 9810 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right) \times 10 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right)$$
 نرخ انرژی تلف شده که در آن $H = h_L$ در نظر گرفته می شود بنابراین:

وات $= 1962000 =$ نرخ انرژی تلف شده

مثال ۳-۱۱: هنگامی که دبی جریان در سیستم $0.6 \text{ ft}^3/\text{s}$ باشد، پمپ نمایش داده شده در آن به میزان $880 \frac{\text{ft} \cdot \text{lb}}{\text{s}}$ توان به آب اضافه می کند. مقدار افت بار بین سطح آب در مخزن و رأس جت را محاسبه کنید؟



شکل مثال ۳-۱۱

حل: معادله انرژی را بین سطح آب در مخزن و رأس جت می نویسیم که در آن سطح مرجع محور لوله افقی می باشد:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_p = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_l$$

که در آن $P_1 = P_2 = 0$ (زیرا فشار نسبی در ۱ و ۲ صفر است)، $V_1 = 0$ (زیرا سطح مخزن بزرگ است) و $V_2 = 0$ (زیرا در رأس جت (بالاترین نقطه جت) سرعت صفر است).

برای تعیین H_p داریم:

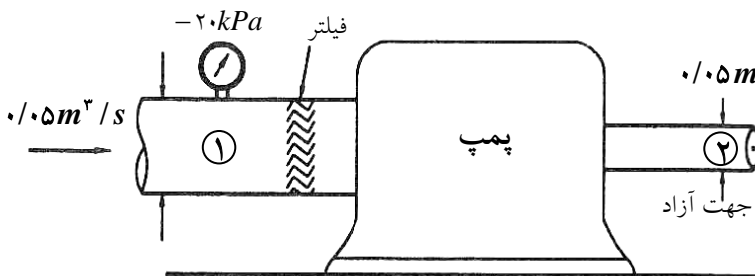
$$H_p = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{880}{62.4 \times 0.6} = 23.5 \text{ ft}$$

بنابراین رابطه (۱) برابر می شود با:

$$\sum h = z_1 - z_2 + H_p = 8 - 24 + 23/5 \Rightarrow \sum h_l = 7/5 \text{ ft}$$

مقداری از تلفات مربوط به جریان آب داخل لوله و مقداری از آن مربوط به برخورد جت آب با هوای اطراف می باشد.

مثال ۳-۱۲: پمپ نمایش داده شده در این مثال، توان ۲۰ کیلو وات را به جریان آب اضافه می کند. اگر تنها افت موجود در این شکل مربوط به صافی واقع در ورودی پمپ باشد، افت بار برای این صافی چقدر خواهد بود؟



شکل ۳-۲۵

حل: معادله انرژی را بین نقاط ۱ و ۲ با در نظر گرفتن پمپ می نویسیم:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + H_p = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_l \quad (1)$$

که در آن سطح مبنا از نقاط (۱) و (۲) عبور می کند $(z_1 = z_2)$ ، $P_1 = -20 \text{ kPa}$ و فشار نسبی در (۲) $P_2 = 0$ است (تخلیه به اتمسفر). همچنین داریم:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.05 \text{ (m}^3/\text{s)}}{\frac{\pi}{4} (0.05 \text{ m})^2} = 6.37 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.05 \text{ (m}^3/\text{s)}}{\frac{\pi}{4} (0.05 \text{ m})^2} = 6.37 \text{ m/s}$$

همچنین:

$$H_p = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{20 \times 10^3 \left(\frac{\text{N.m}}{\text{s}} \right)}{9810 \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right) \times (0.05 \text{ m}^3/\text{s})} = 40.8 \text{ m}$$

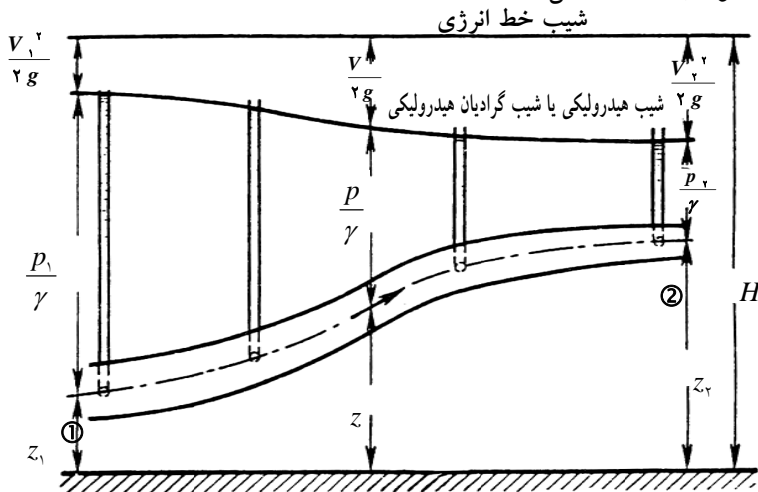
اکنون رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{\left(-20 \times 10^3 \frac{N}{m^2}\right)}{9810 \left(\frac{N}{m^3}\right)} + \frac{\left(6/37 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \times \left(9/81 \frac{m}{s^2}\right)} + 40/8m = \frac{\left(25/5 \frac{m}{s}\right)^2}{2 \times \left(9/81 \frac{m}{s^2}\right)} + h_f$$

$$\Rightarrow h_f = 7/69m$$

۱۵-۳ تغییرات انرژی در یک سیستم سیال (خط شیب انرژی و خط شیب هیدرولیکی)

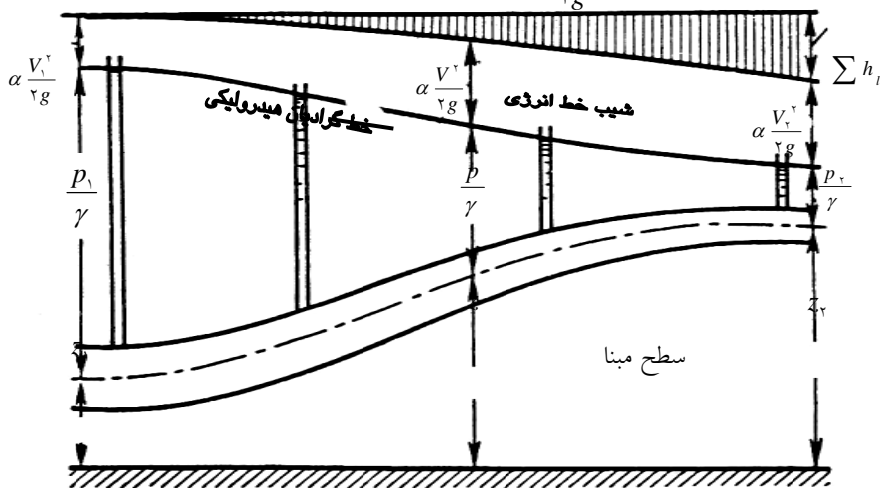
به‌طوری‌که از شکل پیداست، اگر پیزومترهایی را در نقاط مختلف مسیر جریان، مطابق شکل (۴-۱۰) در یک لوله نصب کنیم، مایع تا ارتفاع $\frac{P}{\gamma}$ در پیزومتر صعود خواهد کرد. با در نظر گرفتن معادله برنولی، به عبارت $\left(Z + \frac{P}{\gamma}\right)$ ، ارتفاع پیزومتریک گفته می‌شود. شیب پیزومتریک یا شیب هیدرولیکی مکان هندسی نقاطی است که از ترسیم سطح آب در پیزومترها به‌دست می‌آید و آن را معمولاً به HGL نمایش می‌دهند. اگر ارتفاع نظیر سرعت $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$ به خط شیب هیدرولیکی اضافه شود، شیب انرژی یا خط انرژی کل $\left(\frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} + Z = cte\right)$ به‌دست خواهد آمد که آن را به EGL نمایش می‌دهند و به‌طوری‌که از شکل پیداست، در مورد سیالات ایده‌آل، این خط با سطح مبنای اولیه، موازی است. شکل (۲۶-۳)



شکل ۲۶-۳ بیان ترسیمی رابطه برنولی در مورد سیالات ایده‌آل تراکم‌ناپذیر [۳]

در سیال ایده‌آل خط شیب هیدرولیکی و خط شیب انرژی دارای شیب یکسان بوده و به موازات یکدیگر ترسیم می‌شوند (مگر در زمانی که مقطع جریان ثابت نباشد)

ولی دارای اختلافی به میزان $\frac{V^2}{2g}$ خواهند بود.



شکل صفحه ۳-۲۷ بیان ترسیمی رابطه برنولی برای سیالات حقیقی [۳]

همچنین اگر در جریان سیال اصطکاک وجود داشته باشد و سیال واقعی باشد، در آن صورت در طول جریان با افت انرژی مواجه خواهیم شد. در اینجا خط انرژی افقی نیست و در مقطع دوم به اندازه $\sum h_l$ سقوط کرده است شکل (۳-۲۷). باید توجه داشت که افت انرژی $\sum h_l$ تلف شدن انرژی محسوب نمی‌شود بلکه موید بخشی از انرژی مفید است که به گرما تبدیل شده است (این مقدار انرژی باعث بالارفتن دمای سیال می‌شود).

نکاتی برای کاربرد معادله برنولی و ترسیم خطوط شیب هیدرولیکی و شیب انرژی در سیستم مورد مطالعه دو نقطه که در آنجا تعداد مجهولات حداقل است انتخاب کنید. یک سیستم مرجع را پایین نقطه سیستم به دلخواه انتخاب کنید تا از علامت‌های منفی در محاسبات جلوگیری شود و سپس معادله برنولی را در جهت جریان بنویسید. همان‌طوری که در معادله برنولی مشاهده می‌شود با افزایش هد انرژی فشاری، هد انرژی جنبشی کاهش می‌یابد، یعنی این که با هم رابطه عکس دارند.

برای سهولت محاسبات به‌ویژه در مایعات از فشار نسبی استفاده کنید زیرا اگر یک نقطه در سطح آب در یک مخزن باز یا در خروجی یک جت انتخاب شود، فشار در آنجا فشار جو بوده، در نتیجه فشار نسبی صفر خواهد بود.

اگر سرعت‌ها در دو نقطه مورد انتخاب برای کاربرد معادله برنولی مجهول باشند، آنها را توسط معادله پیوستگی به یکدیگر مرتبط کنید.

معادله برنولی بیان ریاضی اصل (کار - انرژی) است که بر طبق آن کار انجام شده روی یک ذره توسط تمام نیروهای وارد بر آن برابر تغییر انرژی جنبشی ذره می‌باشد. برای محاسبه جهت جریان آب در یک لوله، معادله انرژی را برای جریان از مقطع (۱) به (۲) و همچنین از مقطع (۲) به (۱) می‌نویسیم. افت بار به‌دست آمده توسط معادله انرژی برای جهت صحیح جریان مثبت و برای جهت نادرست جریان منفی خواهد بود.

معادله برنولی اساساً بین دو نقطه از یک سیال مشخص نوشته می‌شود، نه دو سیال متفاوت.

در جریان‌های لزج به دلیل وجود اصطکاک ارتفاع خط EGL در طول جریان افت می‌کند.

یک پمپ باعث صعود ناگهانی EGL و HGL می‌شود. زیرا در این حالت پمپ به جریان انرژی می‌دهد. به‌طور مشابه، اگر به‌طور ناگهانی انرژی از جریان گرفته شود (برای مثال توسط توربین) در این صورت EGL و HGL به‌طور ناگهانی نزول خواهند کرد.

اگر در مسیر جریان شیر یا انبساط یا انقباض ناگهانی وجود داشته باشد در ارتفاع خط EGL افت ناگهانی صورت خواهد گرفت.

برحسب تعریف، خط شیب انرژی به مقدار $\alpha \frac{V^2}{2g}$ بالای شیب هیدرولیکی قرار می‌گیرد. بنابراین اگر سرعت صفر باشد، برای مثال سرعت در سطح آب در یک مخزن یا دریاچه، خطوط شیب هیدرولیکی و انرژی بر سطح آب منطبق خواهند شد. همچنین خط EGL همواره بالاتر از خط HGL است.

در سطح آب یک کانال باز یا تخلیه جریان از یک لوله به اتمسفر فشار نسبی صفر است، بنابراین به دلیل $\frac{P}{\gamma} = 0$ شیب هیدرولیکی بر سطح آب منطبق خواهد بود. از

این موضوع می‌توان برای تعیین HGL در برخی سیستم‌های فیزیکی استفاده کرد. افت بار جریان در یک لوله یا کانال همیشه به این معناست که EGL دارای شیب به طرف پایین در جهت جریان است. تنها استثناء در این قاعده زمانی رخ می‌دهد که یک پمپ به مایع انرژی دهد. در نتیجه یک صعود ناگهانی در EGL و HGL در جهت پایین دست به وجود خواهد آمد.

با تغییر قطر لوله یا سطح مقطع کانال، سرعت جریان نیز تغییر خواهد کرد. در نتیجه فاصله بین EGL و HGL تغییر خواهد نمود.

اگر چه بسیاری از اتصالات باعث تغییر در شیب هیدرولیکی و انرژی می‌شوند که دارای جزئیات جالبی می‌باشند، اما اغلب از انحراف موضعی بین HGL به EGL ناشی از تغییرات موضعی $\frac{V^2}{2g}$ چشمپوشی می‌شود.

هرگاه در یک خط لوله، فشار بخشی از لوله کمتر از اتمسفر باشد خط HGL زیر لوله قرار خواهد گرفت یا مقدار $\frac{p}{\gamma}$ منفی خواهد شد. لذا در فاصله‌ای که خط لوله زیر خط تراز هیدرولیکی واقع می‌شود، این پدیده را سیفون گویند.

۳-۱۶ ضریب تصحیح انرژی جنبشی

از آنجایی که در معادله برنولی لزجت سیال برابر صفر در نظر گرفته شده است، بایستی در مقایسه با حالت واقعی که لزجت مقداری مخالف صفر دارد تصحیحی در نظر بگیریم. به همین دلیل برای انرژی جنبشی $\frac{V^2}{2g}$ ضریب تصحیح α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V} \right)^2 dA = \frac{\int u^2 dA}{V^2 A} \quad (3-28)$$

V : سرعت متوسط در سطح مقطع

u : سرعت در هر نقطه از سطح مقطع

A : مساحت سطح مقطع

بنابراین معادله انرژی بین دو نقطه (۱) و (۲) برای سیال تراکم‌ناپذیر به صورت

زیر درمی‌آید:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \sum h_l \quad (29-3)$$

برای جریان آرام در لوله‌ها $\alpha = 2$ و برای جریان‌های آشفته در لوله‌ها مقدار α بین $1/10 < \alpha < 1/0.1$ تغییر می‌کند و در صورتی که توزیع سرعت یکنواخت باشد $\alpha = 1$ و بجز در کارهای دقیق در سایر موارد از آن صرف‌نظر شده و برابر واحد در نظر گرفته می‌شود.

۱۷-۳ ضریب تصحیح اندازه حرکت

با توجه به اینکه سرعت در تمامی مقطع سطح کنترل ثابت نمی‌باشد بنابراین برای تصحیح آن ضریبی در نظر گرفته می‌شود که به آن ضریب تصحیح اندازه حرکت β گویند.

ضریب تصحیح اندازه حرکت برابر است با:

$$\beta = \frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V} \right)^2 dA = \frac{\int u^2 dA}{V^2 A} \quad (30-3)$$

برای جریان آرام درون لوله مدور مستقیم مقدار $\beta = \frac{4}{3}$ و برای جریان یکنواخت $\beta = 1$ بوده و همواره $\beta > 1$ خواهد بود.

بنابراین معادله اندازه حرکت بین دو مقطع و برای سیال تراکم ناپذیر به صورت زیر در می‌آید:

$$F = \dot{m}(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) = \rho Q(\beta_2 V_2 - \beta_1 V_1) \quad (31-3)$$

مثال ۳-۱۳: در لوله‌ای آب با سرعت ۴۰ متر بر ثانیه جریان دارد. اولاً ارتفاع نظیر سرعت آن را برحسب متر آب تعیین کنید. ثانیاً این مقدار ارتفاع معادل چه مقدار فشار است.

حل:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{4.0^2}{2 \times 9.81} = 0.81/5$$

$$p = \rho h = 1000 \times 9.81 \times 0.81/5 = 7995.15 \text{ N/m}^2$$

مثال ۳-۱۴: روغنی به جرم مخصوص نسبی ۰/۷۵ از درون لوله‌ای به قطر ۶ اینچ و تحت فشار ۱۰ بار در جریان است. اگر ارتفاع نظیر انرژی کل مایع نسبت به سطح مبنایی که ۲/۵ متر زیر محور لوله قرار گرفته برابر ۱۸۰ متر باشد، شدت جریان روغن را محاسبه کنید؟

حل: براساس رابطه برنولی داریم:

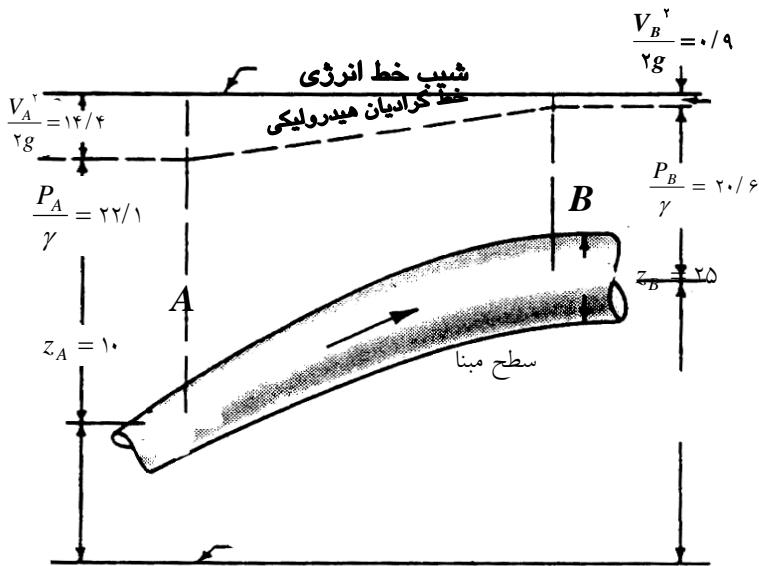
$$z + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2g} = \text{ارتفاع نظیر انرژی کل روغن}$$

$$180 = 2/5 + \frac{10 \times 10^5}{0.75 \times 9.81 \times 1000} + \frac{V^2}{2 \times 9.81}$$

$$V = 28.58 \text{ m/s}$$

$$Q = AV = \frac{\pi}{4} \left(\frac{6 \times 2/54}{100} \right)^2 \times 28.58 = 0.521 \text{ m}^3/\text{s} = 521 \text{ lit/s}$$

مثال ۳-۱۵: مطابق شکل ۴-۶ آب از نقطه A به نقطه B با شدت جریان ۱۳/۲ متر مکعب در ثانیه جریان دارد و فشار در نقطه A معادل ۲۲/۱ متر آب است. اگر از افت انرژی در طول AB صرف نظر کنیم، فشار در نقطه B را محاسبه و خطوط فشار و انرژی را رسم کنید؟ قطر لوله در قسمت A و B به ترتیب ۱ و ۲ متر است.



شکل ۳-۲۸ مربوط به مثال ۶-۳ [۵]

حل: رابطه برنولی بین دو نقطه A و B به صورت زیر است:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$V_A = \frac{Q}{A} = \frac{13/2}{\frac{\pi}{4}(1)^2} = 16/8 \text{ m/s}, \quad V_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{13/2}{\frac{\pi}{4}(2)^2} = 4/2 \text{ m/s}$$

$$10 + 22/1 + \frac{(16/8)^2}{2g} = 25 + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{(4/2)^2}{2g}$$

برای رسم خط انرژی، می توان فاصله آن را (H) از طریق مجموع انرژی های مایع در یکی از نقطه A و B به دست آورد:

$$H = z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = 10 + 22/1 + 14/4 = 46/5$$

$$H = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} = 25 + 20/6 + 0/9 = 46/5 \text{ m H}_2\text{O}$$

۱۸-۳ کاربردهای معادله برنولی

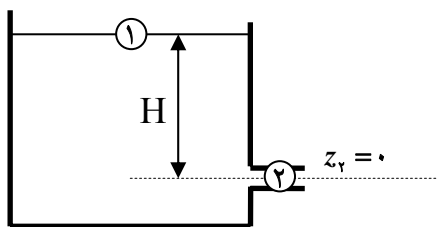
مسائل مختلفی وجود دارند که می‌توان با استفاده از معادله انرژی یا برنولی آنها را حل کرد. در ادامه به تحلیل برخی از حالات معمول جریان سیال می‌پردازیم که در آنها از معادله برنولی استفاده می‌شود. در همه موارد فرض بر این است که سیال ایده آل باشد (یعنی اتلاف انرژی نداریم).

۱-۱۸-۳ سرعت تخلیه مخزن

اگر مخزن شکل (۳-۵) را در نظر بگیرید و نقاط (۱) و (۲) را در دو نقطه روی یک خط جریان فرض کنید، معادله برنولی بین آن دو نقطه به صورت زیر است:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

نقاط (۱) و (۲) در محیط اتمسفری بوده و فشار آنها با هم برابر است ($p_1 = p_2 = p_{atm}$) همچنین با فرض $z_2 = 0$ و انتخاب نقطه (۲) به عنوان مبنا (Datum) رابطه ساده‌تر نیز خواهد شد.



شکل ۳-۲۹

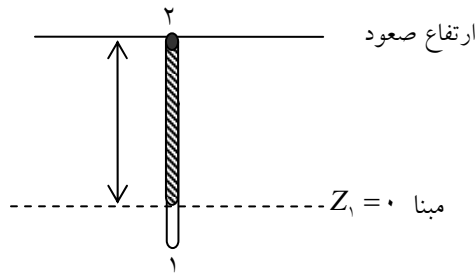
بنابراین داریم:

$$0 + 0 + H = \frac{V^2}{2g} + 0 + 0 \Rightarrow V = \sqrt{2gH} \quad (3-32)$$

معادله فوق بیان می‌کند که سرعت جریان خروجی برابر است با سرعت سقوط آزاد از سطح مخزن. این موضوع به نام قضیه تورچلی معروف است. همچنین مقدار دبی از حاصلضرب سرعت در سطح مقطع به دست می‌آید.

۳-۱۸-۱ ارتفاع صعود مایع پس از خارج شدن از لوله

لوله آبی را در نظر بگیرید که مایعی با سرعت V_1 از آن رو به بالا خارج می‌شود، با نوشتن معادله برنولی برای آن، طبق شکل (۳-۳۰) ارتفاع صعود به صورت زیر محاسبه می‌شود.



شکل ۳-۳۰

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2$$

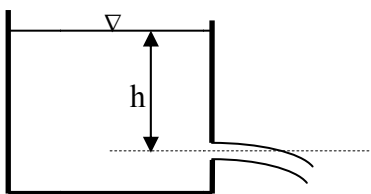
$$p_1 = p_2 = p_{atm} \quad z_1 = 0 \quad \text{و} \quad z_2 = H \quad \text{و} \quad V_2 = 0 \Rightarrow H = \frac{V_1^2}{2g}$$

۳-۱۸-۲ اندازه‌گیری دبی به وسیله روزنه

روزنه مجرایی است که در داخل یک صفحه ایجاد می‌گردد و با قرار دادن آن به صورت عمود بر جهت جریان، میزان دبی را با استفاده از یکسری روابط خاص محاسبه می‌نمایند. روزنه‌ها به شکل اشکال مختلف وجود دارند اما سه فرم دایره، مربع و مستطیلی آن از همه متداول‌تر است.

همان‌طور که می‌دانیم ذرات آب پس از خروج از روزنه با شتاب ثقل آزاد رها می‌شوند به همین دلیل سرعت آنها از رابطه $V = \sqrt{2gh}$ پیروی می‌کند. که در رابطه h فاصله سطح آب تا مرکز ثقل روزنه است. بنابراین با توجه به رابطه $Q = AV$ داریم:

$$V = A \sqrt{2gh} \quad (3-33)$$



شکل ۳-۳۱ مقطع قائم یک روزنه

اما به دلیل آنکه روزنه باعث ایجاد افت در سرعت و تخلیه می‌گردد که آن را به وسیله دو ضریب تصحیح می‌نماییم. بنابراین فرمول (۳-۳۳) به صورت زیر در می‌آید:

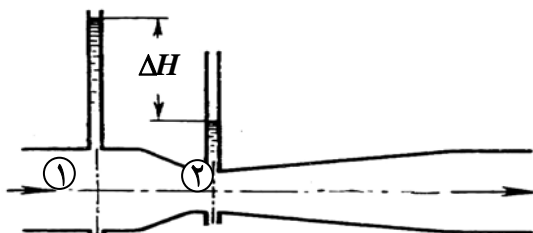
$$Q = C_v \cdot C_d \cdot A \sqrt{2gh} \quad (3-34)$$

C_v : ضریب تصحیح سرعت که بین ۰/۶ تا ۰/۷ است.

C_d : ضریب تخلیه که حدود ۰/۶ تا ۰/۹ است.

۳-۱۸-۳ لوله و انتوری

وانتوری برای اندازه گیری شدت جریان سیال (دبی سیال) در لوله‌ها به کار می‌رود (شکل ۳-۳۲). مطابق شکل، قسمت ورودی و انتوری از یک لوله با مقطع مخروطی تشکیل شده که به دنبال آن، یک لوله واگرا قرار گرفته است. از آنجا که مطابق شکل، سطح مقطع ۱-۱ بزرگتر از سطح مقطع ۲-۲ است، لذا در مقطع اول، سرعت کمتر و فشار زیادتر است و اختلاف فشار دو مقطع را می‌توان به وسیله فشار سنج‌هایی که در این دو قسمت تعبیه شده است، اندازه گیری نمود. اگر فشار در مقطع ۱ برابر P_1 ، سرعت آن V_1 و مقطع آن A_1 باشد و مقادیر نظیر آن برای مقطع ۲ به ترتیب P_2 ، V_2 و A_2 فرض شود، با فرض توزیع یکنواخت سرعت در مقاطع و صرف نظر از افت، می‌توان رابطه برنولی را در مورد دو مقطع یاد شده به شرح زیر نوشت:



شکل ۳-۳۲ و انتوری [۲]

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

از آنجا که $\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \Delta H$ است بنابراین رابطه به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\frac{P_1 - P_2}{\gamma} = \Delta H = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \quad (3-35)$$

و چون طبق رابطه پیوستگی داریم $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} \quad \text{و} \quad V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

با قرار دادن مقادیر در رابطه ۶-۷۸ نتیجه زیر به دست خواهد آمد:

$$\Delta H = \frac{Q^2}{2g} \left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_1^2 A_2^2} \right) \quad (3-36)$$

و یا

$$Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g \Delta H} \quad (3-37)$$

از آنجا که $\frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g}$ مقدار ثابتی است که به هندسه وانتوری بستگی دارد

لذا اگر این مقدار را با C نشان دهیم، رابطه به صورت ساده زیر درمی آید:

$$Q = C \sqrt{\Delta H} \quad (3-38)$$

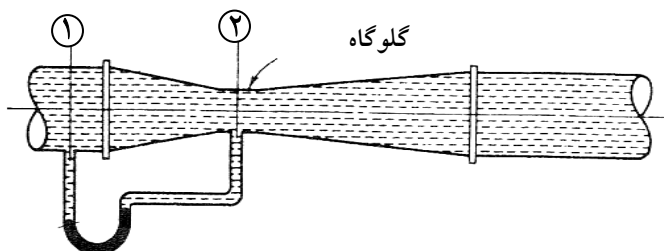
به عبارت دیگر، شدت جریان، تابعی از ΔH است و بدین ترتیب، می توان

فشارسنج را مستقیماً بر حسب شدت جریان مدرج کرد.

مثال ۳-۱۶: برای اندازه گیری دبی جریان روغن به چگالی 0.9 از یک لوله

وانتوری استفاده کرده ایم که قطر آن در مقطع ۱ برابر 15 cm و در مقطع ۲ برابر 10 cm

است. اختلاف فشار دو مقطع 20 kPa می باشد. دبی جریان را به دست آورید؟



شکل ۳-۳۳

حل: ابتدا معادله پیوستگی بین مقطع ۱ و ۲ را می‌نویسیم:

$$Q = AV_1 = A_2V_2 = \frac{\pi}{4}(0.15)^2V_1 = \frac{\pi}{4}(0.1)^2V_2$$

$$V_1 = 56/59Q \quad V_2 = 127/32Q \quad \text{و به دست می‌آوریم:}$$

حال معادله برنولی را با توجه به $z_1 = z_2$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

داریم:

$$\gamma = 0.9 \times 9806 = 8825 \frac{N}{m^3} \quad \text{و} \quad p_1 - p_2 = 20 kpa$$

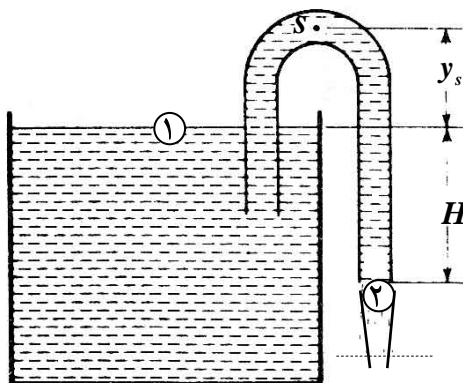
با جایگذاری این مقادیر و نیز جایگذاری V_1 و V_2 بر حسب Q داریم:

$$\frac{20000}{8825} = \frac{Q^2}{2g} \left[\left(\frac{127}{32} \right)^2 - \left(\frac{56}{59} \right)^2 \right]$$

$$Q = 58/4 \text{ Lit/s} \quad \text{با حل معادله فوق به دست می‌آوریم:}$$

۳-۱۸-۴ سیفون

لوله‌ای که مایع را از سطح آزاد بالاتر می‌برد و سپس آن را در ارتفاعی پایین‌تر از سطح آزاد تخلیه می‌کند، سیفون نام دارد. نکته جالب توجه این که فشار در بالاترین نقطه لوله سیفون در مقطع s کمتر از فشار جو است. بنابراین اگر این نقطه را بیش از اندازه از سطح آزاد مایع بالا ببریم، فشار در نقطه s به فشار بخار اشباع رسیده و سیفون دیگر قادر به تخلیه مایع نخواهد بود زیرا مایع به سرعت بخار شده و حباب‌های بخار مانع حرکت آن می‌شوند.



شکل ۳-۳۴ سیفون

فرض می‌کنیم که مایع سیفون را کاملاً پر کرده باشد و به‌طور پیوسته در آن جریان داشته باشد. معادله انرژی را بین نقاط ۱ و ۲ می‌نویسیم:

$$H = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_l$$

$$H = \frac{V^2}{2g} + K \frac{V^2}{2g} + f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

K مجموع ضرایب افت موضعی است. از ارتفاع نظیر سرعت فاکتور می‌گیریم:

$$H = \frac{V^2}{2g} (1 + K + \frac{fL}{D}) \quad (3-39)$$

روش حل این معادله مانند روش حل مسائل ساده جریان در لوله‌هاست. اگر دبی معلوم باشد، مستقیماً می‌توان H را تعیین کرد. اگر H معلوم باشد، برای تعیین دبی باید مقداری برای f فرض کرد و معادله را به روش آزمون و خطا حل نمود.

پس از حل معادله (۳-۳۹) می‌توانیم معادله را بین نقاط ۱ و ۲ بنویسیم و فشار در بالاترین نقطه سیفون را به‌دست آوریم:

$$0 = \frac{V^2}{2g} + \frac{P_s}{\gamma} + y_s + K' \frac{V^2}{2g} + f \frac{L'}{D} \frac{V^2}{2g}$$

K' مجموع ضرایب افت موضعی بین نقاط موردنظر است. L' طول لوله تا s می‌باشد. از معادله فوق ارتفاع فشاری در بالاترین قسمت سیفون به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{P_s}{\gamma} = -y_s - \frac{V^2}{2g} (1 + K' + \frac{fL'}{D}) \quad (3-40)$$

این معادله نشان می‌دهد که فشار نسبی در قله سیفون منفی است.

مثال ۳-۱۷: سیفون نشان داده شده در شکل (۳-۳۴) دارای لوله به قطر ۱۲ mm بوده و ارتفاع سطح آزاد مایع درون مخزن آن از سطح مبنا ۳/۵m است. ارتفاع بالاترین نقطه لوله از سطح مبنا ۴/۸m و ارتفاع سطح خروجی لوله از سطح مبنا ۲/۲m و قطر مایع خروجی در مقطع ۲، ۱۰mm می‌باشد. دبی ایده‌آلی که از سیفون می‌گذرد را حساب کنید. فشار در بالاترین نقطه سیفون چقدر است؟

حل:

$$H = 3/5 - 2/2 = 1/3 \text{ m}$$

در این حالت:

با استفاده از معادله توریچلی داریم:

$$V_r = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 1/3} = 0.816 \text{ m/s}$$

$$Q = V_r A = 0.816 \times \pi \times \frac{0.1^2}{4} = 0.0064 \text{ m}^3/\text{s}$$

برای تعیین فشار در مقطع ۳ از معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۳ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$P_1 = 0$$

$$P_3 = ?$$

$$V_1 = 0$$

$$V_3 = 0.816 \times \left(\frac{0.1}{0.05}\right)^2 = 3.264 \text{ m/s}$$

$$h_1 = 3/5 \text{ m}$$

$$h_3 = 4/8 \text{ m}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

در نتیجه:

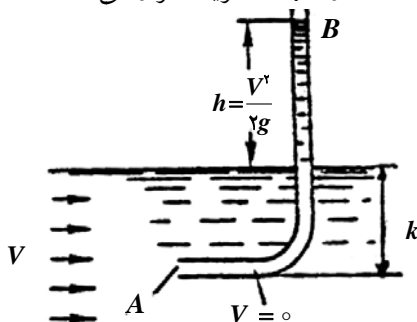
$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{P_3}{\gamma} + z_3$$

$$0 + 0 + 3/5 = \frac{P_3}{1000 \times 9.81} + \frac{3.264^2}{2 \times 9.81} + 4/8$$

$$P_3 = -18.9 \text{ kPa}$$

۳-۱۸-۵ لوله پیتو

لوله پیتو دستگاهی است که برای تعیین سرعت جریان به کار می‌رود و در حقیقت از یک لوله خمیده تشکیل شده است، که یک شاخه آن در امتداد جریان و دهانه آن به طرف بالا قرار می‌گیرد و شاخه دیگر لوله قائم بوده و به اتمسفر مربوط است که آن را مطابق شکل (۳-۳۵) در جهت جریان قرار می‌دهند.



شکل ۳-۳۵ لوله پیتو [۳] ۲۲۰ صفحه

اگر رابطه برنولی را بین نقطه A و نقطه B بنویسیم، با توجه به اینکه فشار در نقطه B برابر فشار اتمسفر است، خواهیم داشت:

$$\frac{p_1}{\gamma} = 0, \quad z_2 = k + h$$

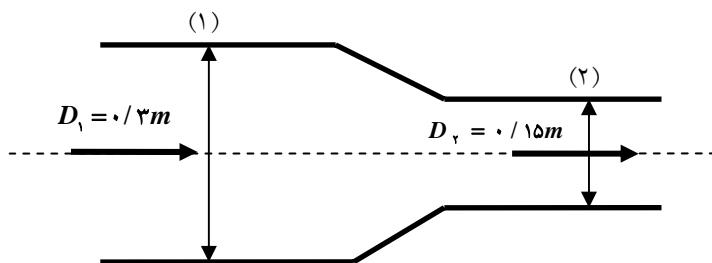
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$0 + k + \frac{V_1^2}{2g} = h + k + 0 \Rightarrow h = \frac{V_1^2}{2g} \quad V_1 = \sqrt{2gh} \quad (3-41)$$

بنابراین ارتفاع h برابر ارتفاع نظیر سرعت مایع است و به کمک آن، می‌توان سرعت جریان را محاسبه کرد.

با توجه به کاربردهای معادله برنولی در زیر مثالهای متعددی آورده شده است.
مثال ۳-۱۸: نفت از یک لوله به قطر ۰/۳ متر با فشار ۳۰۰ kPa به لوله‌ای به قطر ۰/۱۵ متر که در آن فشار ۱۲۰ kPa است جریان دارد. اگر لوله‌ها افقی باشند و از اثرات لزجت صرف نظر کنیم، مقدار دبی نفت را محاسبه کنید؟

$$\gamma_{\text{نفت}} = 6/67 \frac{kN}{m^3}$$



شکل ۳-۳۶

حل:

نقاط (۱) و (۲) را مطابق شکل بر روی محور دو لوله که در یک امتداد قرار دارند انتخاب می‌کنیم. همچنین بهتر است سطح مرجع را در لوله‌های افقی محور لوله در نظر بگیریم که در این صورت $z_1 = z_2$ خواهد شد.
 اکنون رابطه برنولی را بین نقاط ۱ و ۲ می‌نویسیم:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

چون $z_1 = z_2$ است، بنابراین:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (1)$$

با توجه به داده‌های مسئله، در معادله فوق دو مجهول V_2, V_1 وجود دارد بنابراین به یک معادله دیگر (معادله پیوستگی) نیاز است، براساس معادله پیوستگی می‌توان نوشت:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow \frac{\pi D_1^2}{4} \times V_1 = \frac{\pi D_2^2}{4} V_2$$

$$V_2 = \left(\frac{0.3}{0.15} \right)^2 V_1 \Rightarrow V_2 = 4V_1$$

اگر در معادله (۱) به جای V_2 معادل آن را برحسب V_1 از معادله (۲) بگذاریم و ساده کنیم داریم:

$$15 V_1^2 = 2g \left(\frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right)$$

$$V_1^2 = \frac{2 \times 9.81}{15} \times \left(\frac{300 - 200}{62.4} \right) \Rightarrow V_1 = 5.94 \text{ m/s}$$

$$Q = A_1 V_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} \times V_1 = \frac{\pi (0.3)^2}{4} \times 5.94 \Rightarrow Q = 0.42 \text{ m}^3/\text{s}$$

مثال ۳-۱۹: از لوله‌ای به قطر ۰/۶۶۶ فوت مکعب بر ثانیه آب تحت فشار ۳۰ psi

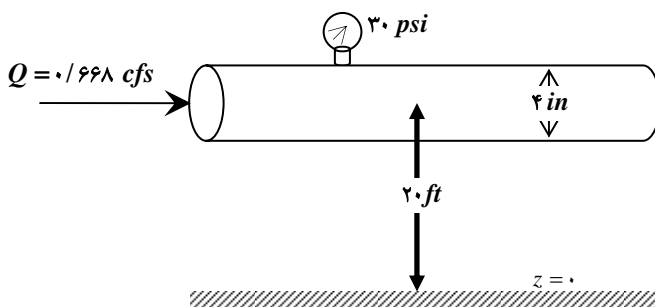
عبور می‌کند.

(الف) ارتفاع نظیر فشار را بر حسب فوت آب حساب کنید؟

(ب) ارتفاع نظیر سرعت را محاسبه کنید؟

(ج) بار کل را نسبت به سطح مرجعی که ۲۰ فوت زیر لوله قرار دارد به دست

آورید؟



شکل ۳-۳۷

حل:

$$\frac{P}{\gamma} = \frac{30 \frac{lb}{in^2} \times \left(144 \frac{in^2}{ft^2} \right)}{62.4 \left(\frac{lb}{ft^3} \right)} = 69 / 2 ft \quad (\text{الف})$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.668}{\frac{\pi}{4} \left(\frac{4}{12} ft \right)^2} = 7 / 65 ft/s \quad (\text{ب})$$

بنابراین:

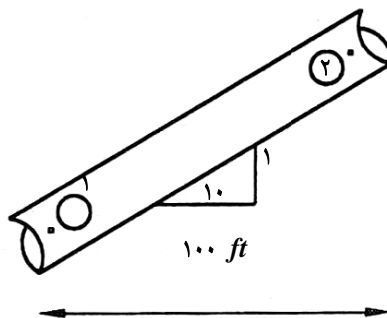
$$\frac{V^2}{2g} = \frac{(7 / 65)^2}{2 \times 32 / 2} = 0.099 ft$$

$$z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = 20 + 69 / 2 + 0.099 = 90.099 ft \quad (\text{ج})$$

مثال ۳-۲۰: آب به طور دائمی از یک مقطع به مقطع دیگر لوله شیب داری مطابق

شکل این مثال جریان دارد. اگر در مقطع (۱) فشار استاتیک $12 psi$ و در مقطع (۲)

فشار استاتیک $5 psi$ باشد، آب در کدام جهت جریان خواهد داشت؟



شکل ۳-۳۸

ابتدا معادله انرژی را از مقطع ۱ به مقطع ۲ می نویسیم:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_l$$

$$0 + \frac{12 \frac{lb}{in^2} \times 144 \frac{in^2}{ft^2}}{62.4 \frac{slug}{ft^3}} + \frac{V_1^2}{2g} = 10 + \frac{5 \frac{lb}{in^2} \times 144 \frac{in^2}{ft^2}}{62.4 \frac{slug}{ft^3}} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_l$$

چون سطح مقطع لوله ثابت است بنابراین $V_1 = V_2$ خواهد بود که در نتیجه از طرفین رابطه فوق حذف خواهند شد. بنابراین پس از ساده کردن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum h_l = 61/15 ft$$

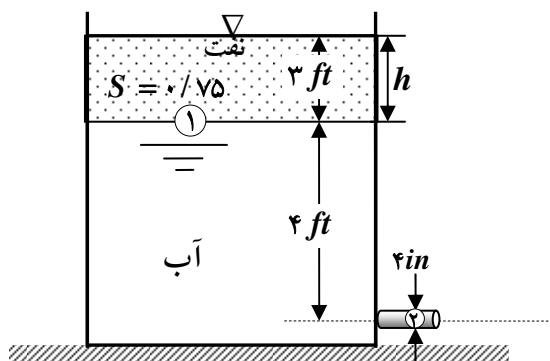
همچنین اگر معادله انرژی را از مقطع (۲) به مقطع (۱) بنویسیم:

$$z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + \sum h_l$$

$$\sum h_l = z_2 - z_1 + \frac{P_2 - P_1}{\gamma} = 10 + \frac{(5 - 12) \times 144}{62.4} = -61/15 ft$$

چون افت بار محاسبه شده از (۱) به طرف (۲) مثبت است، بنابراین جهت صحیح جریان از (۱) به طرف (۲) می‌باشد.

مثال ۳-۲۱: با چشم‌پوشی از تلفات، مقدار دبی جریان در شکل (۳-۳۹) را به دست آورید؟



شکل ۳-۳۹

حل: اگر برای این مسأله نقاط ۱ و ۲ را مطابق مثال قبل در سطح مخزن و خروجی در نظر بگیریم، پاسخ مسأله درست نخواهد بود، زیرا مخزن از دو نوع مایع

تشکیل شده است. به این دلیل نقطه (۱) را در فصل مشترک دو مایع، نقطه ۲ را در خروجی جت از مخزن و سطح مرجع را محور جت خروجی در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

می‌دانیم فشار در نقطه ۱ در شکل فوق برابر ارتفاع ستون نفت در روی آن است، یعنی:

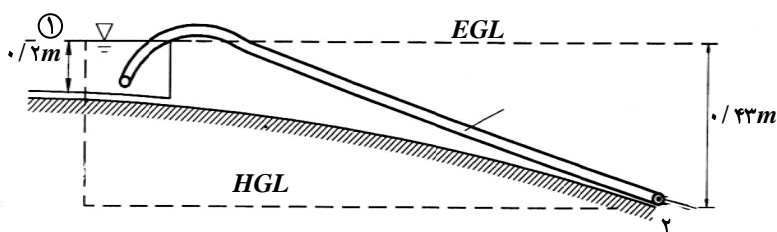
$$P_1 = SG_{\text{نفت}} \times \gamma \times h \Rightarrow \frac{P_1}{\gamma} = SG_{\text{نفت}} \times h = 0.75 \times 3 = 2.25 \text{ ft}$$

همچنین $V_1 = 0$ چون سطح مخزن بزرگ است، $P_2 = 0$ چون فشار نسبی در ۲ صفر است و $Z_2 = 0$ چون سطح مرجع از (۲) می‌گذرد. بنابراین رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$4 + 2.25 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow 6.25 = \frac{V_2^2}{2 \times 32.2} \Rightarrow V_2 = 20.05 \text{ ft/s}$$

$$Q = A_2 V_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{4}{12} \text{ ft} \right)^2 \times 20.05 = 1.075 \text{ ft}^3/\text{s}$$

مثال ۳-۲۲: از یک لوله پلاستیکی به قطر ۲۰ mm برای تخلیه آب استخری استفاده می‌شود. خط شیب هیدرولیکی HGL و خط شیب انرژی EGL را برای شکل این مثال ترسیم کنید؟ از تلفات چشم‌پوشی کنید.



شکل ۳-۴۰

چون $P_1 = P_2 = 0$ (فشار نسبی در ۱ و ۲ صفر است) $V_1 = 0$ (مخزن بزرگ است)، $Z_2 = 0$ (سطح مرجع از ۲ می‌گذرد)

$$z_1 = 0.7 + 0.23 = 0.93 \text{ m} \quad \text{بنابراین:}$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$0/43 + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} = 0/43m$$

چون جریان ایده‌آل (بدون تلفات) است و هیچ پمپ یا توربینی در مسیر جریان وجود ندارد، شیب انرژی EGL افقی و هم سطح با ارتفاع آب در مخزن خواهد بود. شیب هیدرولیکی HGL به مقدار $\frac{V^2}{2g}$ پایین‌تر از EGL مطابق شکل قرار دارد. چون قطر لوله ثابت است. بنابراین سرعت جریان در لوله ثابت خواهد بود و نمودار فوق به‌دست خواهد آمد.

مثال ۳-۲۳: روغنی به جرم مخصوص نسبی $0/761$ از مخزن A به مخزن E در جریان است. (شکل ۳-۴۱). انرژی در قسمت‌های مختلف سیستم، از روابط زیر به‌دست می‌آید:

از A تا B رابطه $\frac{V_1^2}{2g}$ $0/6$

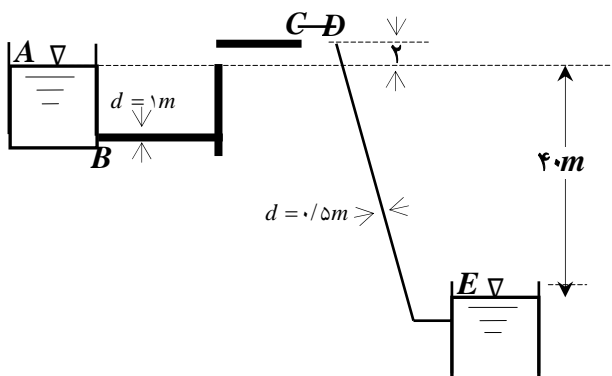
از B تا C از رابطه $\frac{V_1^2}{2g}$ 9

از C تا D از رابطه $\frac{V_{0/5}^2}{2g}$ $0/4$

از D تا E از رابطه $\frac{V_{0/5}^2}{2g}$ 9

الف) شدت جریان Q را محاسبه کنید؟

ب) فشار در نقطه C را به‌دست آورید؟



شکل ۳-۴۱

حل:

الف) با توجه به اینکه سرعت در نقاط A و E ناچیز است، بنابراین می‌توان آنها را معادل صفر در نظر گرفت. اگر فشار نسبی هوا را صفر فرض کنیم و ارتفاع نقطه E را به عنوان مبنا در نظر گیریم، رابطه برنولی بین A و E به صورت زیر خواهد بود:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} = z_E + \frac{P_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + \sum h_{A \rightarrow E}$$

$$0 + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + \left(0 + \frac{V_1^2}{2g} + 9 \frac{V_1^2}{2g} + 0 + \frac{V_{1/5}^2}{2g} + 9 \frac{V_{1/5}^2}{2g} \right)$$

$$0 = 9 \frac{V_1^2}{2g} + 9 \frac{V_{1/5}^2}{2g}$$

با توجه به رابطه پیوستگی داریم:

$$\frac{\pi}{4} (1)^2 \times V_1 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times V_{1/5} \Rightarrow V_1 = \frac{1}{4} V_{1/5}$$

بنابراین اگر از این رابطه مقدار V_1 را بر حسب $V_{1/5}$ حساب کرده و در رابطه قبلی قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$V_{1/5} = 8/86 \text{ m/s}, \quad Q = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 8/86 = 1/74 \text{ m}^3/\text{s}$$

ب) با نوشتن رابطه برنولی بین A و C و انتخاب A به عنوان مبنا خواهیم داشت:

$$0 + 0 + 0 = 2 + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + (0 + 6 + 9/0) \frac{V_1^2}{2g}$$

از طرفی بر اساس رابطه پیوستگی داریم:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{1}{16} \frac{V_{1/5}^2}{2g} = \frac{(8/86)^2}{16 \times 2g} = \frac{1}{4}, \quad V_1 = 2/21 \text{ m/s}$$

اگر این مقدار را در رابطه قبلی قرار دهیم، فشار در نقطه C به شرح زیر حاصل خواهد شد:

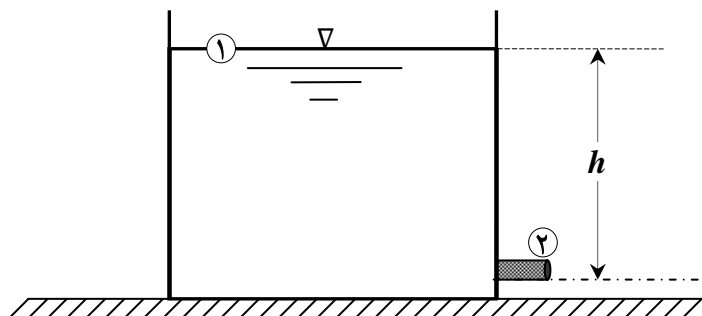
$$h = \frac{P_C}{\gamma} = -0/15 \quad \text{متر روغن}$$

برای تبدیل این فشار به پاسکال به شرح زیر عمل می‌کنیم:

$$P_C = \gamma h = 0/761 \times 1000 \times 9/81 (-0/15) = -1119/8 \text{ Pa}$$

مثال ۳-۲۴: مطابق شکل یک مخزن بزرگ حاوی مایع، دارای یک سوراخ به عنوان

خروجی می‌باشد، سرعت جت خروجی از این مخزن چقدر است؟



شکل ۳-۴۲

در اینجا چون مخزن فقط حاوی یک نوع مایع است پس نقاط ۱ و ۲ را مطابق شکل انتخاب می‌کنیم و سطح مبنا را محور جت خروجی در نظر می‌گیریم.

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$P_1 = 0$ (چون فشار نسبی در سطح مخزن صفر است)، $V_1 = 0$ (چون سطح مخزن خیلی بزرگ است) $P_2 = 0$ (چون فشار جت خروجی برابر فشار اتمسفر است و از آنجا که در محاسبات از فشار نسبی استفاده می‌شود، فشار خروجی در (۲) صفر است). همچنین $z_2 = 0$ چون واقع بر سطح مرجع است و $z_1 = h$ است.

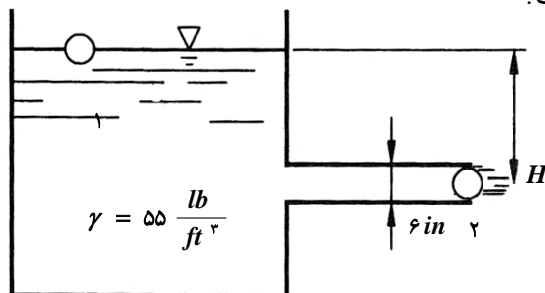
از رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$h + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

مثال ۳-۲۵: تراز آب سطح مخزن نسبت به محور لوله خروجی $H = 25 \text{ ft}$

می‌باشد. اگر مقدار تلفات مطابق شکل ذیل معادل $\frac{3V_2^2}{2g}$ بر حسب ft باشد؛ مقدار دبی

جریان چقدر است؟



شکل ۳-۴۳

حل:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \sum h_l$$

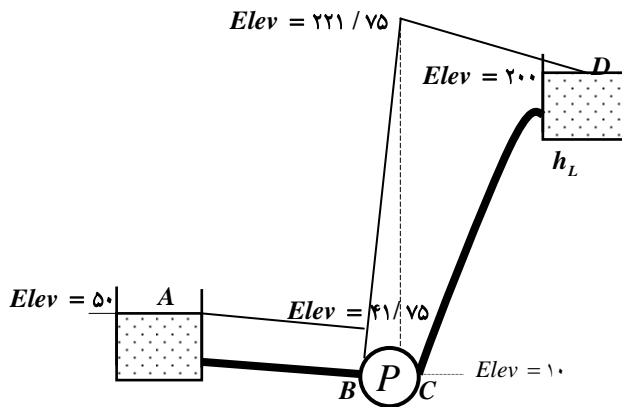
$$H + 0 + 0 = 0 + 0 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{3V_2^2}{2g}$$

دقت کنید فشار نسبی در نقاط (۱) و (۲) صفر است و سطح مرجع محور لوله $(z_2 = 0)$ است. چون سطح مخزن بزرگ است $V_1 = 0$ می باشد.

$$V_2 = 20.05 \text{ ft/s} \quad \text{بنابراین:}$$

$$Q = A_2 V_2 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{6}{12} \right)^2 \times 20.05 = 3.94 \text{ cfs} \left(\frac{\text{ft}^3}{\text{s}} \right)$$

مثال ۳-۲۷: در شکل (۳-۴۵) روغنی به جرم مخصوص نسبی ۰/۷۶۲ به وسیله پمپ BC از مخزن A به مخزن D منتقل می شود. اگر افت انرژی از A تا B معادل ۸/۲۵ متر آب و از C تا D معادل ۲۱/۷۵ متر آب باشد، قدرت پمپ را محاسبه و خط انرژی در طول خط لوله را رسم کنید؟ قطر لوله در تمام قسمت ها یک متر و شدت جریان مایع در لوله ۶۰ لیتر در ثانیه است.



شکل ۳-۴۵

حل: سرعت مایع در مخازن A و D به قدری ناچیز است که می توان از آن صرف نظر کرد. اگر خط BC را به عنوان مبنا در نظر بگیریم و از فشار هوا صرف نظر کنیم و رابطه برنولی را بین A و D بنویسیم، خواهیم داشت:

$$Z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + H_{Pump} = Z_D + \frac{P_D}{\gamma} + \frac{V_D^2}{2g} + \sum h_l$$

$$40 + 0 + 0 + H_{Pump} = 19 + 0 + 0 + (8/25 + 21/75)$$

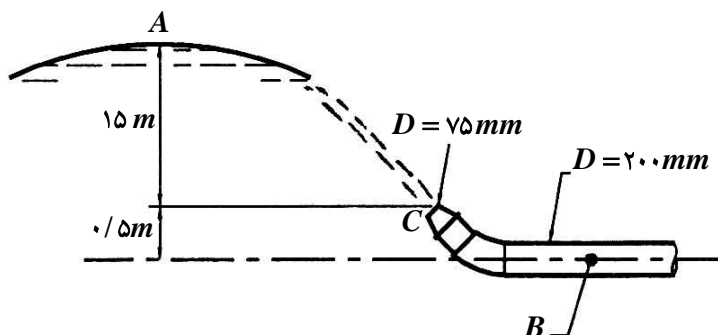
$$H_{Pump} = 18 \text{ m}$$

$$P_{Pump} = \gamma H Q = 9/81 \times 1000 \times 18 \times 0/060 = 105948 \text{ W} = 106 \text{ KW}$$

برای رسم خط انرژی به این نکته توجه می‌کنیم که این خط در نقطه A در ارتفاع ۵۰ متری بالای خط مبنای صفر قرار دارد. از نقطه A تا خط انرژی به اندازه ۸/۲۵ متر سقوط می‌کند به طوری که ارتفاع آن در نقطه B برابر $41/75 = 50 - 8/25$ متر خواهد بود. در اثر پمپ، ارتفاع خط انرژی به اندازه ارتفاع نظیر پمپ یعنی ۱۸۰ متر بالاتر می‌رود و ارتفاع آن معادل $221/75 = 180 + 41/75$ متر خواهد شد. بین نقاط C و D خط انرژی به اندازه ۲۱/۷۵ متر سقوط می‌کند و ارتفاع آن در نقطه D برابر $200 = 221/75 - 21/75$ متر است.

به کمک این اطلاعات، می‌توان خط انرژی را مطابق شکل رسم کرد.

مثال ۳-۲۸: در شکل (۳-۴۴)، سرعت در نقطه A برابر با 18 m/s می‌باشد، فشار در نقطه B را به دست آورید؟ از اصطکاک صرف نظر کنید.



شکل ۳-۴۴

$$\frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + \sum h_l$$

$$\frac{P_B}{9/8} + \left(\frac{V_B^2}{2 \times 9/80.7} \right) + 0 = 0 + \left(\frac{18}{2 \times 9/80.7} \right) + (0.5 + 15) + 0$$

$$P_B = -0.49991 \times V_B^2 + 313/78, \quad \frac{P_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} + z_C = \frac{P_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A + h_C$$

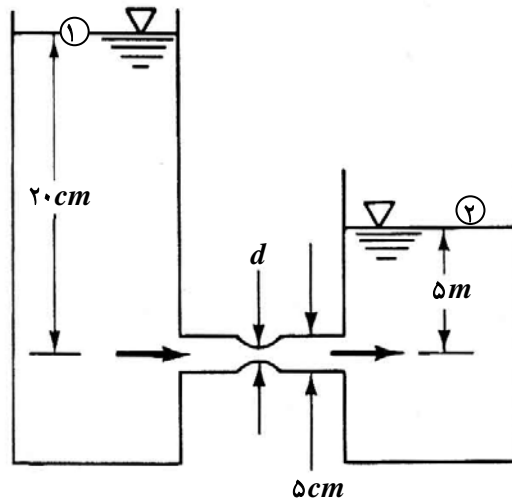
$$0 + \frac{V_C^2}{(2 \times 9/80.7)} + 0 = 0 + \frac{18}{2 \times 9/80.7} + 15 + 0 \Rightarrow V_C = 24/86$$

$$A_B V_B = A_C V_C \Rightarrow \left[(\pi) \left(\frac{20}{1000} \right)^2 \frac{1}{4} \right] (V_B) = \left[(\pi) \left(\frac{75}{1000} \right)^2 \frac{1}{4} \right] (V_C)$$

$$V_B = 3/496 \text{ m/s}, \quad P_B = (-0.49991) (3/496)^2 + 313/78 = 30.7/68 \text{ kN/m}^2$$

مثال ۳-۲۹: دبی جریان بین دو مخزن مطابق شکل، $16 \frac{L}{s}$ می‌باشد، افت بار در

لوله‌ها را به دست آورید؟ اگر فشار اتمسفر 100 kPa و فشار بخار آب 8 kPa باشد، کاویتاسیون در چه قطری (D) رخ می‌دهد؟ از تلفات ناشی از تغییر قطر و نتوری صرف‌نظر کنید.



شکل ۳-۴۶

حل:

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

$$V_{\text{گلولی}} = \frac{Q}{A_{\text{گلولی}}}$$

$$0 + 0 + 20 = 0 + 0 + 5 + h_f = 15 \text{ m}$$

با فرض اینکه در مرکز تنگ شدگی یعنی $\frac{15}{\gamma} = 7/5 \text{ m}$ ، افت بار در هر طرف تنگ شدگی مساوی ($h_f = 7/5 \text{ m}$) باشد، داریم:

$$V = \left[\frac{0/016}{\frac{\pi d^2}{4}} \right]$$

معادله برنولی را بین نقطه (۱) و تنگ شدگی مقطع با در نظر گرفتن

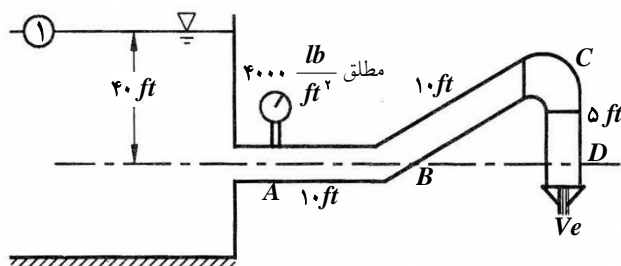
$P_1 = P_{\text{atm}} = 100 \text{ kPa}$ و $P_{\text{گلولی}} = 8 \text{ kPa}$ می‌نویسیم:

$$\frac{100}{9/8} + 0 + 20 = \frac{8}{9/8} + \left(\frac{V_{\text{max}}^2}{2 \times 9/8} \right) + 0 + 7/5 \Rightarrow V_{\text{max}} = 20/7 \text{ m/s}$$

$$20/7 = \left[\frac{0/016}{\frac{\pi d^2}{4}} \right] \Rightarrow d = 0/0314 \text{ m}$$

مثال ۳-۳۰: در سیستم شکل (۳-۴۷) قطر لوله ۶ in و قطر شیپوره (Nozzle)

خروجی ۳ in است. سرعت جریان خروجی V_e را محاسبه کنید؟ از تلفات چشم‌پوشی کنید.



شکل ۳-۴۷

حل:

در این مثال چون فشار مطلق A داده شده است، لازم است فشار اتمسفر (۱۴/۷ Psi) را در نقطه ۱ در نظر بگیریم:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{V_A^2}{2g}$$

$$40 (ft) + \frac{14.7 \left(\frac{lb}{ft^2} \right) \times 144 \frac{in^2}{ft^2}}{62.4 \frac{lb}{ft^3}} + 0 = 0 + \frac{400 \left(\frac{lb}{ft^2} \right)}{62.4 \left(\frac{lb}{ft^3} \right)} + \frac{V_A^2}{2 \times 32.2 \left(\frac{ft}{s^2} \right)}$$

$$V_A = 25.14 \frac{ft}{s}$$

و چون قطر لوله در D, A یکسان است، بنابراین $V_A = V_D = 25.14 \frac{ft}{s}$ خواهد بود. اکنون رابطه پیوستگی را بین D و خروجی شیبوره می‌نویسیم:

$$A_D V_D = A_e V_e$$

$$\frac{\pi \left(\frac{6}{12} \right)^2}{4} \times 25.14 = \frac{\pi \left(\frac{3}{12} \right)^2}{4} \times V_e \Rightarrow V_e = 100.56 \frac{ft}{s}$$

دقت کنید اگر در این مثال، معادله برنولی بین نقطه (۱) و خروجی شیبوره نوشته می‌شد، جواب فوق برای V_e حاصل نمی‌شد. دلیل این امر عدم استفاده از فشار مطلق معلوم در $A \left(4000 \frac{lb}{ft^2} \right)$ و نامشخص بودن فاصله قائم خروجی شیبوره از سطح مرجع عبوری از D می‌باشند.

سؤالات فصل جریان سیالات، مفاهیم و معادلات اصلی

۱. در جریان آشفته.....

(۱) ذرات سیال به‌طور منظم حرکت می‌کنند.

(۲) نیروی پیوستگی مولکول‌ها از انتقال مومنتم در ایجاد تنش برشی مؤثرتر است.

(۳) انتقال مومنتم فقط در مقیاس مولکولی صورت می‌گیرد.

(۴) عموماً تنش برشی در جریان آرام مشابه بیشتر است.

۲. لزجت گردابی.....

- (۱) یک خاصیت فیزیکی است.
 - (۲) به آشفتگی جریان و جرم مخصوص سیال وابسته است.
 - (۳) مستقل از نوع جریان است.
 - (۴) تابع دما و فشار سیال است.
۳. جریان یک بعدی:
- (۱) جریان یکنواخت دائمی است.
 - (۲) جریان یکنواخت است.
 - (۳) جریانی است که در آن تغییر مشخصات در امتداد عمود بر جریان ناچیز است.
 - (۴) منحصر به جریان در خط مستقیم است.
۴. جریان آشفته عموماً در حالتی اتفاق می افتد که.....
- (۱) سیال بسیار لزج باشد.
 - (۲) مجاری جریان مانند لوله های موین بسیار باریک باشند.
 - (۳) لزجت سیال کم سرعت جریان زیاد و مجاری جریان بزرگ باشد.
 - (۴) حرکت سیال بسیار آرام باشد.
۵. سیال ایده آل.....
- (۱) بسیار لزج است
 - (۲) از قانون لزجت نیوتن پیروی می کند.
 - (۳) دارای اصطکاک و تراکم پذیر می باشد. (۴) بدون اصطکاک و تراکم ناپذیر می باشد.
۶. در جریان آرام.....
- (۱) حتی برای حالات بسیار ساده محتاج به انجام آزمایش هستیم.
 - (۲) قانون لزجت نیوتن صادق است.
 - (۳) ذرات سیال در مسیر نامنظم و درهم حرکت می کنند.
 - (۴) لزجت سیال دارای اهمیت نیست.
۷. جریان یکنواخت جریانی است که.....
- (۱) دائمی باشد.
 - (۲) در کلیه نقاط آن $\frac{\partial V}{\partial t}$ صفر باشد.
 - (۳) در هر نقطه بردار سرعت آن ثابت بماند. (۴) در آن $\frac{\partial V}{\partial s}$ صفر باشد.
۸. از جریان های زیر کدامیک نمونه عملی جریان دائمی غیر یکنواخت است؟
- (۱) جریان آب دریاچه در اطراف کشتی

(۲) جریات آب رودخانه در اطراف پایه‌های پل

(۳) جریان با دبی افزایش یابنده در لوله

(۴) جریان با دبی کاهش یابنده در یک مجرای همگرا

۹. خط جریان.....

(۱) خطی است که از نقاط وسط مقاطع جریان می‌گذرد.

(۲) تنها برای جریان یکنواخت تعریف می‌شود.

(۳) در هر نقطه بر بردار سرعت عمود است.

(۴) در جریان دائمی در فضا ثابت است.

۱۰. حجم کنترل.....

(۱) ناحیه معینی از فضا است.

(۲) جرم معینی از فضا است.

(۳) یک سیستم ایزوله است.

(۴) یک فرآیند برگشت پذیر است.

۱۱. معادله پیوستگی.....

(۱) ایجاب می‌کند که قانون دوم نیوتن در تمام نقاط برقرار باشد.

(۲) بیان کننده رابط انرژی و کار است.

(۳) بیان می‌کند که سرعت واقعی در روی مرز نسبت به مرز صفر است.

(۴) مومنتم بر واحد حجم را برای دو نقطه روی خط جریان به یکدیگر ارتباط می‌دهد.

۱۲. آب در لوله‌ای به قطر 50 cm با سرعت 3 m/s جریان دارد دبی جریان برحسب

مترمکعب در ثانیه کدام است؟

(۱) $0/589$

(۲) $1/50$

(۳) $2/536$

(۴) $4/71$

۱۳. معادله پیوستگی برای جریان سیال ایده‌آل.....

(۱) بیان می‌کند که دبی حجمی خالص ورودی به داخل هر حجم کوچک صفر می‌باشد.

(۲) بیان می‌کند که انرژی در طول خط جریان ثابت است.

(۳) بیان می‌کند که انرژی در تمام نقاط سیال یکسان است.

(۴) تنها برای جریان چرخشی به کار می‌رود.

۱۴. واحد جملات معادله $z + \frac{P}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = C$ کدام است؟

(۱) $m.N/s$ (۲) N

(۳) $m.N/kg$ (۴) $m.N/N^3$

۱۵. ضریب تصحیح انرژی جنبشی.....

(۱) در معادله پیوستگی به کار می رود. (۲) با رابطه $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^2 dA$ بیان می شود.

(۳) با رابطه $\frac{1}{A} \int_A \frac{u}{V} dA$ بیان می شود. (۴) با رابطه $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$ بیان می شود.

۱۶. ضریب تصحیح انرژی جنبشی برای توزیع سرعت خطی بین دو صفحه چقدر است؟

(۱) ۰ (۲) ۱

(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲

۱۷. برای به دست آوردن معادله $\sum F_x = \rho Q(V_{x(out)} - v_{x(in)})$ با کدامیک از فرضیات زیر بیان می شود؟

(۱) سرعت روی مقاطع ثابت است. (۲) جریان دائمی است.

(۳) جریان یکنواخت است. (۴) سیال تراکم ناپذیر است.

۱۸. ضریب تصحیح مومنتم به کدامیک از صورت های زیر بیان می گردد؟

(۱) $\frac{1}{A} \int_A \frac{u}{V} dA$ (۲) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{A}\right)^2 dA$

(۳) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^3 dA$ (۴) $\frac{1}{A} \int_A \left(\frac{u}{V}\right)^4 dA$

۱۹. برای توزیع سرعت خطی بین دو صفحه، ضریب تصحیح مومنتم چقدر است؟

(۱) ۰ (۲) ۱

(۳) $\frac{4}{3}$ (۴) ۲

۲۰. دریك خم 180° به قطر 50 mm مایعی به جرم مخصوص 1000 kg/m^3 جریان دارد سرعت 6 m/s و فشار نسبی صفر است. نیروی جداکننده خم از لوله برحسب نیوتن کدام است؟

$$(۱) ۰ \quad (۲) ۷۰/۵$$

$$(۳) ۱۴۱ \quad (۴) ۵/۵$$

۲۱. معادله برنولی به شرطی بین دو نقطه از جریان یک سیال صادق است که باشد.

(۱) خطوط جریان موازی

(۲) خطوط جریان دارای انحناء

(۳) سیال غیرچرخشی، غیرویسکوزیته و غیرقابل تراکم

(۴) سیال غیرقابل تراکم و غیرویسکوز

۲۲. اگر آب در رودخانه‌ای با سرعت ۷ جریان داشته باشد فشار آب وارد بر پایه پلی در مسیر این جریان چقدر است؟

$$(۱) p = \rho gh \quad (۲) p = \frac{1}{\gamma} \rho v^2$$

$$(۳) p = p_0 + \rho gh \quad (۴) p = p_0 + \frac{1}{\gamma} \rho v^2$$

۲۳. خط جریان عبارت است از:

(۱) خطی که کل انرژی جریان را نشان می‌دهد.

(۲) خطی که جریان مقطع عرضی (سطح مقطع) را نشان می‌دهد.

(۳) خطی که در هر نقطه از مقطع زمانی معلوم، بردار سرعت مماس بر آن است.

(۴) خطی که در هر نقطه از مقطع زمانی معلوم، بردار سرعت ترسیمی عمود بر آن است.

۲۴. کدام عبارت زیر معادل شیب خط انرژی سیال است؟

(۱) گرایان انرژی جنبشی سیال در طول لوله

(۲) گرادیان انرژی پتانسیل در طول لوله

(۳) گرادیان پیزومتريک یک سیال در طول لوله

(۴) گرادیان مجموع انرژی جنبشی و پیزومتريک سیال در طول لوله

۲۵. معادله برنولی در امتداد خط جریان در کدام شرایط صادق است:

(۱) جریان دایم، غیرچرخشی و غیر ویسکوز

(۲) جریان دایم غیرچرخشی و قابل تراکم

(۳) جریان دایم غیرقابل تراکم و غیرویسکوز

(۴) جریان غیرچرخشی، غیرقابل تراکم و غیرویسکوز

۲۶. جریان غیرلزج جریانی است که در آن:

(۱) گرادیان فشار ناچیز باشد (۲) گرادیان سرعت ناچیز باشد.

(۳) لزجت سیال صفر باشد (۴) ویسکوزیته نداشته باشد.

۲۷. رابطه برنولی $\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$ را می‌توان در هر لحظه

(۱) در تمام میدان یک جریان تراکم‌ناپذیر غیرچرخشی بین هر دو نقطه نوشت.

(۲) در جریان بالا جهت خیلی کم مثل هوا در امتداد یک لوله جریان در هر طولی نوشت.

(۳) در امتداد خط جریان در لایه مرزی لامینار نوشت.

(۴) فقط در امتداد دو نقطه هر خط جریان وقتی که ρ سیال ثابت باشد، می‌توان نوشت.

۲۸. در چه صورتی می‌توان از معادله برنولی بین دو نقطه دلخواه استفاده کرد؟

(۱) خطوط جریان همگرایی داشته باشند.

(۲) سیال غیرلزج باشد.

(۳) از افت فشار صرف‌نظر گردد.

(۴) در هر شرایطی می‌توان از معادله برنولی بین هر دو نقطه دلخواه استفاده کرد.

