

فصل ششم

آنالیز ابعادی و تشابه هیدرولیکی

۶-۱ مقدمه

شناخت پارامترهای بی بعد درک ما را از پدیده‌های جریان سیال عمیق‌تر می‌نماید. پارامترهای بی بعد مربوط به جریان سیال نیز چنین خصوصیتی دارند. با استفاده از پارامترهای بی بعد می‌توانیم نتایج آزمایش را عمومیت داده، آنها را برای وضعیت‌هایی با ابعاد فیزیکی متفاوت و اغلب برای وضعیت‌هایی با خواص سیال متفاوت نیز به‌کار ببریم. آنچه ما را قادر به تعمیم نتایج آزمایش می‌کند، دانستن مفاهیم آنالیز ابعادی است که در این فصل ارائه می‌شود. تعمیم نتایج آزمایش مزایای متعددی دارد. با این کار توانایی آن را می‌یابیم که به توصیف جامع پدیده پیردازیم و صرفاً به تفسیر نتایج آزمایش خاصی که انجام شده است، محدود نشویم. از اینرو می‌توانیم با انجام تعداد کمی آزمایش (هر چند بسیار برگزیده) از جنبه‌های پدیده پرده برداریم و از این طریق به صرفه‌جویی‌های مهمی در وقت و هزینه نائل شویم. همچنین می‌توانیم نتایج تحقیق خود را به‌صورت فشرده‌تر و مفهوم‌تر به سایر مهندسان و دانشمندان ارائه کنیم تا استفاده از آنها برای ایشان آسان شود.

این مبحث خود به دو شاخه کاملاً متفاوت به نام تحلیل ابعادی و تشابه مدلی تقسیم می‌شود. تحلیل ابعادی تکنیکی است که با آن می‌توان رابطه ریاضی بین چند پارامتر را به‌دست آورد. اگر بدانیم بین چند پارامتر حتماً باید رابطه‌ای وجود داشته باشد کنار هم قرار گرفتن این پارامترها در کنار هم و در قالب یک رابطه باید از منطقی

درست برخورددار باشد. این ارتباط منطقی با تحلیل ابعادی به دست می آید. اما تشابه مدلی تکنیکی است که با آن می توان یک مخزن بزرگ یا یک رودخانه و یا یک ساختمان و یا ماشین هیدرولیکی و غیره را در مقیاس خیلی کوچک تر از مقیاس اصلی آن (گاهی اوقات مدل می تواند بزرگتر از مقیاس اصلی نیز باشد) در آزمایشگاه و با هزینه بسیار کم ایجاد کرد و آزمایش های مورد نظر را روی آن انجام داد و چگونگی نتایج در مدل^۱ را می توان به نمونه اصلی^۲ تعمیم داد. در ادامه تحلیل ابعادی و تشابه مدلی به تفکیک توضیح داده شده اند.

۶-۲ تحلیل ابعادی و روشهای آن

پارامتر هیدرولیکی و فیزیکی از نظر ابعادی دارای تعریف خاصی است. مثلاً کمیت (بُعد) اندازه گیری مسافت، طول است که معمولاً با L نشان داده می شود. دقت داشته باشید که بُعد با واحد یکی نیست. واحد اندازه گیری مسافت می تواند متر، میلی متر، کیلومتر، اینچ، فوت و یا مایل باشد. پس بُعد اندازه گیری مسافت طول است و واحد آن می تواند یکی از موارد فوق باشد. همه پارامترهایی که می شناسیم از نظر ابعادی دارای تعریف مشخص و ثابتی هستند، هر چند از نظر واحدی ممکن است به شکل های گوناگون بیان شوند. برای مثال مساحت را در نظر بگیرید. مساحت از حاصل ضرب طول در طول به دست می آید، پس از نظر ابعادی L^2 است که می توان با واحدهایی مانند متر مربع، میلی متر مربع، کیلو متر مربع و یا هکتار، بیان شود.

کمیت های اصلی موجود در اکثر پارامترهای فیزیکی و هیدرولیکی عبارتند از جرم (M)، طول (L) و زمان (T). رابطه اصلی که این سه کمیت را به هم مرتبط می نماید، قانون دوم نیوتن است که به شکل زیر نوشته می شود:

$$F = ma$$

که در آن F نیرو، m جرم و a شتاب می باشد که خود به شکل زیر نوشته می شود:

$$a = \frac{dV}{dt}$$

که dV تغییرات سرعت و dt تغییرات زمان است.
شکل ابعادی معادله ی فوق را می توان به شکل زیر نوشت:

$$V = LT^{-1}$$

$$m = M$$

$$t = T$$

سپس خواهیم داشت:

$$F = MLT^{-2}$$

در تحلیل ابعادی ممکن است از سیستم های MLT و یا FLT استفاده شود. در سیستم MLT پارامترهای اصلی جرم، طول و زمان هستند و بقیه پارامترها با این پارامترهای اصلی در نظر گرفته می شود و بقیه پارامترها با این پارامترهای اصلی بیان می شوند. در بیشتر کتاب ها مکانیک سیالات، سیستم ابعادی مورد استفاده، MLT می باشد. بر این اساس همه پارامترهایی که می شناسیم می توانند با این سه کمیت اصلی بیان شوند.

استفاده از روش تحلیل ابعادی در بسیاری از حالات می تواند رابطه های مشکل را تجزیه و تحلیل نموده و بین متغیرهای مختلف یک معادله، روابط صحیحی را به دست آورد. در یک رابطه صحیح فیزیکی، در صورت نوشتن معادله بر حسب پارامترهای اصلی آحاد بایستی کمیات مختلف در طرفین یک معادله دارای تجانس و تشابه کامل باشند یعنی بایستی نمای این پارامترها یکسان باشد و به عبارت دیگر کلیه عبارات جمع شونده آن معادله باید دارای ابعاد یکسان باشند.

فرض کنید $Z = a + b + c + \dots$ نشان دهنده یک معادله فیزیکی باشد. در آنصورت شرط لازم و کافی برای همگنی ابعادی آن است که اولاً دیمانسیون a و b و c ... یکی باشد، ثانیاً بعد آنها با بعد Z که در طرف دیگر معادله قرار دارد یکسان باشد.

وقتی تعداد کمیت ها یی که در پدیده ای دخالت دارند کم باشند، می توان بدون استفاده از تکنیک خاصی روابط بدون بعد را نوشت و اشکالی نیز ندارد. اما اگر تعداد

کمیت‌ها زیاد باشند دیگر نمی‌توان ذهنی چیدمان کمیت‌ها را به‌دست آورد. لذا بدین منظور روش‌های متفاوتی مثل قضیه π باکینگهام و روش رایتمایر استفاده می‌شود. در جدول ۹-۱ برخی از کمیت‌های مورد استفاده در مکانیک سیالات و ابعاد آنها آورده‌تر شده است.

جدول ۹-۱ ابعاد برخی از کمیت‌های مورد استفاده در مکانیک سیالات

ابعاد		علامت اختصاری	کمیت
FLT	MLT		
L	L	L	طول
L^x	L^x	A	سطح
L^x	L^x	∇	حجم
LT^{-1}	LT^{-1}	V	سرعت
LT^{-2}	LT^{-2}	A	شتاب
LT^{-1}	LT^{-1}	Q	دبی حجمی
FTL^{-1}	MT^{-1}	\dot{m}	دبی جرمی
FT^xT^{-x}	ML^{-x}	ρ	چگالی
FL^{-x}	$ML^{-x}T^{-x}$	γ	وزن مخصوص
FL^{-x}	$ML^{-x}T^{-x}$	P, σ	فشار و تنش
FTL^{-x}	$ML^{-1}T^{-1}$	μ	لزجت دینامیکی
L^xT^{-1}	L^xT^{-1}	ν	لزجت سینماتیکی
FL^{-1}	MT^{-x}	σ	کشش سطحی
FL	MLT^{-x}	F	نیرو
T^{-1}	T^{-1}	ω	سرعت زاویه ای
FL	ML^xT^{-x}	M	گشتاور
FLT^{-1}	ML^xT^{-x}	P	توان
FL	ML^xT^{-x}	W, E	انرژی و کار
$FL^{-x}T^x$	ML^xT^{-x}	ρ	جرم مخصوص

۶-۲-۱ قضیه باکینگهام^۱

قضیه باکینگهام بیان می‌کند که در یک مساله فیزیکی شامل n کمیت و تعداد m بُعد اصلی است، کمیات‌ها را می‌توان به‌صورت $(n-m)$ پارامتر بی بعد مستقل، مرتب کرد.

1. Buckingham Theorem

فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ کمیات مطرح در مساله، مثلاً فشار، لزجت، سرعت و غیره باشند. تمام این کمیات برای حل مساله موثر شناخته شده‌اند و بنابراین باید رابطه‌ای بین آنها وجود داشته باشد. یعنی:

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0 \quad (1-6)$$

حال اگر پارامترهای بی بعد را π_1, π_2, \dots نشان دهیم، طبق قضیه باکینگهام رابطه فوق به صورت زیر قابل بیان است:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0 \quad (2-6)$$

قضیه باکینگهام به علت نمایش پارامترهای بی بعد با حرف π به نام (قضیه π) معروف شده است.

روش تعیین پارامترهای π این است که ابتدا تعداد m کمیت از کل کمیت‌های A انتخاب می‌شوند که دارای ابعاد مختلفی باشند و شامل m بُعد اصلی (M و L و T) باشند، بنابراین حداکثر مقدار m برابر سه خواهد بود. برای هر پارامتر بدون بُعد، این m کمیت A را به صورت متغیرهای تکراری همراه با توان مجهول و با یکی از کمیت‌های باقی مانده دیگر A با توان یک به کار می‌بریم، لذا اولین پارامتر بدون بُعد را می‌توان به صورت زیر استخراج کرد.

$$\pi_1 = A_1^{x_1} \cdot A_2^{y_1} \cdot A_3^{z_1} \cdot A \quad (3-6)$$

که در آن A_3, A_2, A_1 متغیرهای تکراری و A_4 یکی از متغیرهای غیر تکراری باقی مانده می‌باشد. لذا هر π دارای $m+1$ عضو می‌باشد که m تعداد ابعاد یا پارامترهای تکرار خواهد بود و تعداد $(n-m)$ پارامتر بدون بُعد به دست خواهد آمد و آخرین پارامتر بدون بُعد به شکل زیر خواهد بود.

$$\pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} \cdot A_2^{y_{n-m}} \cdot A_3^{z_{n-m}} \cdot A_n \quad (4-6)$$

در معادلات فوق توان‌های مجهول به صورتی تعیین می‌شوند که پارامتر π بدون بُعد شود. البته باید توجه داشت که در انتخاب متغیرهای تکراری کمیتی که دارای اهمیت کمتری می‌باشد، نباید به عنوان متغیر تکراری انتخاب شود. ضروری است که متغیرهای تکراری از یکدیگر مستقل باشند یعنی هیچکدام را نتوان بر حسب سایرین بیان کرد.

به طور خلاصه می‌توان گفت که n پارامتر (متغیر) شامل m بُعد دارای $n-m$ عدد

بدون بعد π می‌باشد. که تعداد پارامترهای هر π برابر $m+1$ بوده و تعداد پارامترهای تکراری نیز برابر m است.

مراحل انجام تحلیل ابعادی

گام ۱: کمیت‌های (پارامترها یا متغیرها) مؤثر در مسئله را انتخاب کنید (فهرست کردن متغیرها).

گام ۲: نوشتن تابعی از متغیرها.

گام ۳: به دست آوردن تعداد تابع بدون بُعد و انتخاب متغیرهای تکراری.

گام ۴: نوشتن معادلات بدون بُعد با قراردادن کمیت‌های تکراری با توان‌های مجهول و کمیت غیر تکراری با توان ۱

گام ۵: نوشتن معادلات با جایگزینی ابعاد به جای کمیت‌ها و استخراج توان هر بُعد اصلی و مساوی صفر قراردادن آنها

گام ۶: به دست آوردن توان‌های مجهول

گام ۷: جانشین کردن توان‌های به دست آمده در معادله گام ۴ و به دست آوردن پارامترهای بدون بُعد

گام ۸: جانشین کردن پارامترها بدون بعد در رابطه زیر:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$$

گام ۹: در صورت لزوم ترکیب پارامترهای بدون بُعد برای تغییر فرم پارامترهای بدون بُعد و به دست آوردن روابط دیگر.

برای درک بهتر ۹ گام بهتر است در مثال‌های زیر مجدداً مراحل را مرور نمایید.
مثال ۶-۱: برای جریان درهم در لوله افقی صیقلی، افت فشار واحد طول یعنی

به سرعت جریان V ، قطر لوله D ، لزجت دینامیک سیال μ و دانسیته آن ρ ، بستگی دارد.

$$F\left(\frac{\Delta P}{l}, V, D, \rho, \mu\right) = 0$$

با استفاده از آنالیز ابعادی فرم کلی معادله فوق را به دست آورید؟

حل: مراحل را طبق گام‌های بیان شده دنبال می‌کنیم.
گام ۱: کمیت‌هایی که در مساله وجود دارند عبارتند از:

کمیت	لزجت دینامیک	دانسیته	قطر	سرعت	افت فشار در واحد طول
علامت	μ	ρ	D	V	$\frac{\Delta P}{l}$
ابعاد	$ML^{-1}T^{-1}$	ML^{-3}	L	LT^{-1}	$ML^{-2}T^{-2}$

گام ۲: تابعی که برای این متغیرها بتواند نوشته شود، به شکل زیر است:

$$F\left(\frac{\Delta P}{l}, V, D, P, \mu\right) = 0$$

گام ۳: این مساله دارای پنج کمیت ($n=5$) و سه بُعد اصلی ($m=3$) می‌باشد، و قضیه باگینگهام به ما می‌گوید ($n-m=5-3=2$) تنها دو تابع بدون بعد می‌توان بین کمیت‌ها ایجاد نمود که می‌توانیم آنها را π_1 و π_2 نام‌گذاری نماییم.

$$F(\pi_1, \pi_2) = 0$$

با توجه به این که $m=3$ است از کمیت‌های مساله مقادیر V, D, P را به‌عنوان متغیر تکراری و μ و $\frac{\Delta P}{l}$ را به‌عنوان متغیر غیر تکراری در نظر می‌گیریم.
۴. توابع بدون بعد را به‌صورت حاصلضرب متغیرهای تکراری (نماهای مختلف) با توان مجهول و کمیت غیر تکراری با توان یک می‌نویسیم:

$$\pi_1 = V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu$$

$$\pi_2 = V^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} \frac{\Delta P}{l}$$

گام ۵: بجای کمیت‌ها، ابعاد آنها را در هر معادله قرار می‌دهیم و با توجه بدون بعد بودن π ($M^0 L^0 T^0 = 1$) و تجانس ابعادی به یک دستگاه سه معادله و سه مجهول برای هر π خواهیم رسید.
برای تعیین π_1 می‌نویسیم:

$$\pi_1 = V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu \rightarrow (LT^{-1})^{x_1} L^{y_1} (ML^{-2})^{z_1} ML^{-1} T^{-1} \equiv M^0 L^0 T^0$$

$$\begin{cases} x_1 + y_1 - 2z_1 - 1 = 0 \\ -x_1 - 1 = 0 \\ z_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

برای تعیین π_2 می‌نویسیم:

$$\pi_2 = V^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} \frac{\Delta P}{l} \rightarrow (LT^{-1})^{x_2} L^{y_2} (ML^{-2})^{z_2} ML^{-2} T^{-2} \equiv M^0 L^0 T^0$$

$$\begin{cases} x_2 + y_2 - 2z_2 - 2 = 0 \\ -x_2 - 2 = 0 \\ z_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

گام ۶: با حل دستگاه معادلات، توان‌های مجهول را استخراج می‌کنیم:

برای π_1

$$z_1 = -1, y_1 = -1, x_1 = -1$$

برای π_2

$$z_2 = -1, y_2 = 1, x_2 = -2$$

گام ۷: حال توان‌های به‌دست آمده را در معادلات گام ۴ قرار می‌دهیم:

$$\pi_1 = V^{-1} D^{-1} \rho^{-1} \mu$$

$$\pi_2 = V^{-2} D^1 \rho^{-1} \frac{\Delta P}{l}$$

بنابراین:

$$\pi_1 = \frac{\mu}{VD\rho}$$

$$\pi_2 = \frac{\Delta P/l}{\rho V^2/D}$$

رابطه بین پارامترهای بی بعد را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$f\left(\frac{VD\rho}{\mu}, \frac{\Delta P/l}{\rho V^2/D}\right) = 0$$

گام ۹: پارامترهای بی بعد را اگر بخواهیم می‌توانیم معکوس کنیم. اولین پارامتر

یعنی $\frac{VD\rho}{\mu}$ عدد رینولدز است که یکی از مهمترین پارامترهای بی‌بعد در مکانیک

سیالات می‌باشد. مقدار عدد رینولدز نوع جریان را معلوم می‌کند. با نمایش عدد

رینولدز به Re ، معادله فوق به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\Delta P}{l} = f_1(R_e, \frac{\rho V^2}{D})$$

فرمولی که به طور معمولی به کار می رود به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta P}{l} = f(R_e) \frac{\rho V^2}{2D}$$

این فرمول بر حسب افت ارتفاع ΔH به صورت زیر بیان می شود:

$$\frac{\Delta H}{L} = f(R) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

۶-۲-۲ روش دوم برای تعیین پارامترهای بی بعد روش هانساکر^۱ و رایتمایر^۲

هانساکر و رایتمایر روش دیگری برای تعیین پارامترهای بی بعد ابداع کرده اند که زودتر به نتیجه می رسد. در این روش ابتدا ابعاد اصلی M و L و T را بر حسب متغیرهای تکراری بیان می کنیم. آنگاه روابط حاصله را در نمایش ابعادی سایر کمیات قرار می دهیم تا پارامترهای بی بعد به دست آیند. برای نمونه در مثال (۶-۱) متغیرهای تکراری V و D و ρ به صورت زیر بیان می شوند:

$$V = LT^{-1}$$

$$D = L$$

$$\rho = mL^{-3}$$

حال M و L و T را بر حسب متغیرهای تکراری بیان می کنیم:

$$V = LT^{-1} \rightarrow V = DT^{-1} \rightarrow T = DV^{-1}$$

$$\rho = ML^{-3} \rightarrow \rho = MD^{-3} \rightarrow M = \rho D^3$$

$$L = D$$

$$T = DV^{-1}$$

$$M = \rho D^3$$

برای یافتن پارامترهای بی بعد مستقیماً از معادلات فوق استفاده می کنیم. برای

تعیین π_1 می نویسیم:

$$\mu = ML^{-1}T^{-1} = \rho D^3 D^{-1} D^{-1} V = \rho DV$$

و در نتیجه داریم:

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho DV}$$

برای تعیین π_2 می‌نویسیم:

$$g = LT^{-2} = DD^{-2}V^2 = V^2 D^{-1}$$

و در نتیجه داریم:

$$\pi_2 = \frac{g}{V^2 D^{-1}} = \frac{gD}{V^2}$$

در این روش احتیاجی نیست که برای تعیین هر پارامتر، حل سه معادله و سه مجهول تکرار شود.

۳-۶ ضوابط انتخاب متغیرهای تکراری

تعداد این متغیرها باید مساوی با تعداد ابعاد اصلی (اولیه) در مسئله باشد. متغیرهای تکراری نباید شامل متغیر وابسته در فهرست اصلی باشد. متغیرهای تکراری باید به بهترین شکل ممکن فیزیک مسئله را بیان کنند. برای این منظور، انتخاب متغیرهای تکراری مناسب می‌توان در سه گروه مشخص شامل متغیرهای هندسی، خواص سیال و اثر عوامل خارجی طبقه‌بندی شود. متغیرهای هندسی توسط طولها (مانند قطر لوله) مشخص می‌شوند و خواص سیال توسط عواملی نظیر جرم یا لزجت سیال مشخص می‌شوند که تمایل دارند تغییراتی در سیستم ایجاد کنند. و اثر عوامل خارجی با پارامترهایی نظیر سرعت، شتاب و... معین می‌گردند. انتخاب پارامترهای تکراری باید به نحوی باشد که ترکیب آنها تشکیل یک پارامتر بدون بعد ندهد. برای مثال V, D, ρ با ابعاد LT^{-1}, L, ML^{-3} نمی‌توانند یک پارامتر بدون بعد تشکیل دهند زیرا L, M قابل ساده یا حذف شدن در بین سه پارامتر V, D, ρ نیستند.

۴-۶ محدودیت‌های تحلیل ابعادی

۱. تحلیل‌های ابعادی قادر به شناسایی عوامل مؤثر در پیش‌بینی یک پدیده نیست، بلکه تجربه محقق نشان می‌دهد کدام عوامل در یک پدیده مؤثر می‌باشند.
۲. حذف یک متغیر معنی دار در تحلیل یک پدیده ممکن است موجب حذف

یک پارامتر بدون بعد معنی دار شود، همچنان که نگهداری یک پارامتر بدون بعد غیر مفید موجب صرف هزینه بیهوده و اتلاف زمان می شود.

نکات:

گروه های بی بعد، گروه هایی از کمیات می باشند، هنگامی که در یکدیگر ضرب می شوند نمایش ابعادی آنها برابر واحد است.

در صورتی که یک کمیت بدون بعد وجود داشته باشد، این کمیت یک عامل بدون بعد π است.

هر گاه در یک مسأله $n-m=1$ باشد، فقط یک پارامتر بدون بعد برای توضیح مسأله لازم است. در این حالت $\pi_1=c$ خواهد بود که در آن c یک ثابت است.

در صورتی که دو کمیت دارای ابعاد یکسان باشند نسبت آنها یک عامل بدون بعد π خواهد بود.

هر توان یک عامل بدون بعد π خود یک عامل بدون بعد است.

ضرب یک عدد در هر عامل بدون بعد، خود یک عامل بدون بعد است.

هر عامل بدون بعد π را می توان به صورت تابعی از عوامل بدون بعد دیگر π بیان نمود.

اگر یک پارامتر π از ضرب یا تقسیم سایر پارامترهای π به دست آید، یک پارامتر بدون بعد مستقل محسوب نمی شود. برای مثال پارامتر π_4 اگر به صورت $\pi_4 = \frac{\pi_1}{\pi_2 \pi_3}$

تعریف شود، مستقل از π_1, π_2 و π_3 نخواهد بود.

تابع f در رابطه $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$ باید براساس داده های آزمایشگاهی و تحلیل آماری (رگرسیون) تعیین شود.

اگر یک کمیت فیزیکی بدون بعد باشد، بدون انجام هر نوع محاسبه، این کمیت یک پارامتر π خواهد بود. برای مثال در بحث موینگی زاویه α یک پارامتر π محسوب می شود.

اگر دو کمیت فیزیکی ابعاد یکسانی داشته باشند، نسبت آنها یک پارامتر بدون بعد π خواهد بود. برای مثال نسبت عمق آب به عرض آن در یک کانال $(\frac{h}{w})$ یک پارامتر بدون بعد است.

هر پارامتر π می‌تواند توسط همان π با نمای دیگر جایگزین شود. برای مثال π_1 با π_1^3 یا π_2 با $\frac{1}{\pi_2}$ می‌تواند تعویض شوند.

هر پارامتر π می‌تواند با حاصلضرب یک ثابت عددی در آن جابه‌جا شود. برای مثال π_1 با $5\pi_1$ می‌تواند تعویض شود.

هر پارامتر π می‌تواند بصورت تابعی از سایر پارامترهای π بیان شود. برای مثال اگر سه جمله π_1, π_2 و π_3 در یک مسئله فیزیکی وجود داشته باشند، می‌توان آن را به صورت روبرو نوشت: $\pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3)$

مثال ۶-۲: مقدار دبی عبوری سیال از یک روزنه Q ، به چگالی سیال ρ ، قطر روزنه d و اختلاف فشار ΔP بستگی دارد. با استفاده از تحلیل ابعادی معادله دبی عبوری را به دست آورید؟

گام ۱: کمیت‌هایی که در مساله وجود دارند به قرار زیر می‌باشند:

کمیت	دبی	چگالی سیال	قطر	اختلاف فشار
علامت	Q	ρ	d	ΔP
ابعاد	$L^3 T^{-1}$	ML^{-3}	ML^{-1}	$ML^{-1} T^{-2}$

گام ۲: تابعی که برای این متغیرها می‌تواند نوشته شود، به شکل زیر است:

$$F(Q, \rho, d, \Delta P)$$

گام ۳: این مساله دارای چهار کمیت ($n=4$) و سه بعد اصلی (MLT) ($m=3$) می‌باشد و قضیه باکینگهام به ما می‌گوید که $n-m=4-3=1$ تنها یک تابع بدون بُعد می‌توان بین این کمیت‌ها برقرار نمود. حال به تعداد $m=3$ از کمیت‌ها را انتخاب و آن‌ها را متغیر تکراری نامگذاری می‌کنیم. فرض می‌کنیم ρ و d و ΔP را متغیر تکراری در نظر می‌گیریم.

گام ۴: حال تابع بدون بُعد را با نوشتن کمیت‌های تکراری با توان مجهول و کمیت غیرتکراری با توان ۱ می‌نویسیم:

$$\pi = \rho^{x_1} d^{y_1} \Delta p^{z_1} Q$$

گام ۵: حال به جای کمیت‌ها، ابعاد آن‌ها را که در بند ۱ نوشته شده قرار می‌دهیم و با توجه به بدون بعد بودن π ($M^0 L^0 T^0 = 1$) و تجانس ابعادی، توان هر بُعد اصلی را استخراج می‌کنیم و آن را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

$$\pi_1 = \rho^{x_1} d^{y_1} \Delta p^{z_1} Q = (ML^{-3})^{x_1} (L)^{y_1} (ML^{-1}T^{-2})^{z_1} L^3 T^{-1} = M^0 L^0 T^0$$

$$\begin{cases} x_1 + z_1 = 0 \\ -3x_1 + y_1 - z_1 = 0 \\ -2z_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \quad y_1 = -2, \quad z_1 = -\frac{1}{2}$$

گام ۷: حال توان‌های به دست آمده را در معادله گام ۴ جایگزین می‌کنیم:

$$\pi = \rho^{\frac{1}{2}} d^{-2} \Delta p^{-\frac{1}{2}} Q$$

گام ۸: رابطه تابع بدون بُعد را چنین می‌نویسیم:

$$f(\rho^{\frac{1}{2}} d^{-2} \Delta p^{-\frac{1}{2}} Q)$$

گام ۹: هر گاه در مساله $n-m=1$ باشد، فقط یک پارامتر بدون بعد برای توضیح مساله لازم است. در این حالت $\pi_1 = c$ خواهد که در آن c یک ثابت است. بنابراین:

$$c = \rho^{\frac{1}{2}} d^{-2} \Delta p^{-\frac{1}{2}} Q \Rightarrow Q = cd^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

۵-۶ نیروهای مؤثر بر سیالات در حال حرکت

حرکت سیالات معمولاً نتیجه تأثیر دو گروه نیروی مختلف است که این دو دسته نیرو، نوع و شرایط حرکت سیال را کنترل می‌کنند. یک گروه از این نیروها، نیروهای شتاب‌دهنده سیال که سبب حرکت آن می‌شوند و گروه دیگر که مخالف گروه اولند، از حرکت سیال و شتاب دار شدن آن جلوگیری می‌کنند.

۱-۵-۶ نیروی اینرسی^۱

نیروی اینرسی در تمام حالات در مورد سیالات وجود دارد و برابر حاصلضرب جرم در شتاب حرکت است، یعنی:

$$F_i = Ma = MV \frac{dV}{ds} \propto \rho L^3 V \frac{V}{L} \propto \rho L^2 V^2 \quad (۵-۶)$$

که در آن ρ جرم مخصوص، V حجم و a شتاب است. اگر بعد حجم مشخصه مایع را با L نشان داده و سرعت را با V و زمان را با T نشان دهیم.

۲-۵-۶ نیروی لزجت^۱

این نیرو نیز در تمام موارد حرکت وجود دارد و با حرف F_v نشان داده می‌شود و متناسب با ضریب لزجت، سرعت و طول مسیر است. یعنی:

$$F_v = \tau \cdot A = \mu \frac{dV}{dy} \cdot A \propto \mu \frac{V}{L} \cdot L^2 \propto \mu VL \quad (۶-۶)$$

۳-۵-۶ نیروی ثقل^۲

نیروی گرانی یا ثقل در تمامی مواردی که عامل اصلی حرکت سیال نیروی وزن است (مثل حرکت مایعات در کانال‌ها) و نیز در مواردی نظیر حرکت مایعات از دریچه‌ها، سرریزها و نظایر آن، وجود دارد و با نماد F_g نشان داده می‌شود.

$$F_g = m \cdot g \propto \rho L^3 g \quad (۷-۶)$$

۴-۵-۶ نیروی کشش سطحی^۳

نیروی کشش سطحی در مواردی مثل حرکت مایعات از روی سرریزها با ارتفاع کم و یا حرکت مایعات در مجاری عریض و کم عمق، موثر است و با نماد F_{st} نشان داده می‌شود:

$$F_{st} = \sigma \cdot L \quad (۸-۶)$$

که در آن σ نیروی کشش سطحی مؤثر بر واحد طول است.

۵-۵-۶ نیروی تراکم‌پذیری^۴ یا الاستیک^۵

نیروی تراکم‌پذیری یا الاستیک در مواردی مثل پدیده چکش آبی (در لوله‌ها) که

1. Viscous force
2. gravity force
3. surface tension force
4. compressibility force
5. Elasticity force

تراکم‌پذیری مایعات مهم است، وجود دارد و با حرکت F_e نشان داده می‌شود:

$$F_e = E.A \propto EL^3 \quad (۹-۶)$$

که در آن E ضریب الاستیسیته مایع است.

۶-۵-۶ نیروی فشاری^۱

نیروی فشاری نیز در اکثر موارد ضمن حرکت سیالات وجود دارد و از مهمترین موارد آن می‌توان حرکت سیالات در لوله‌ها را نام برد:

$$F_p = \Delta P.A \propto \Delta P.L^2 \quad (۱۰-۶)$$

در آن ΔP اختلاف فشار دو مقطع سیال است که به فاصله L از هم قرار دارند.

۶-۶-۶ عددهای بدون بعد مهم در مکانیک سیالات

بسیاری از پارامترهای بدون بعد را می‌توان نسبت بین دو نیروی سیال دانست. مقدار نسبی این نسبت‌ها نشان‌دهنده اهمیت نسبی یکی از نیروها نسبت به دیگری است. در اکثر پدیده‌های سیال، متغیرهای تغییر فشار (ΔP)، طول (L)، لزجت (μ)، کشش سطحی (σ)، سرعت صوت (C)، شتاب گرانی (g) و جرم مخصوص (ρ)، سرعت (V) ممکن است مهم باشند.

در حرکت مایعات همیشه چند نیرو شرکت دارند، اما همواره یک یا دو نیرو نقش مهمتری نسبت به سایر نیروها در تداوم حرکت ایفا می‌کنند که از دیدگاه مکانیک سیالات مطالعه آنها اهمیت دارد. این نیروها عبارتند از:

۶-۶-۱ عدد رینولدز^۲

این عدد نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت را بیان می‌کند و برابر است با:

$$Re = \frac{F_i}{F_v} = \frac{\rho L^3 V^2}{\mu VL} = \frac{\rho LV^2}{\mu} = \frac{LV}{\nu} \quad (۱۱-۶)$$

که در آن L بعد مقطع جریان و ν ضریب گرانشی سینماتیکی سیال است.

در مواردی که خصوصیات و هندسه جریان مهم باشد از عدد رینولدز استفاده می‌گردد. از کاربردهای عدد رینولدز می‌توان به جریان داخل لوله‌ها، حرکت با سرعت معمولی در اطراف اتومبیل‌ها، جریان در توربوماشین‌ها و حرکت زیر دریایی در زیر آب اشاره نمود.

۶-۶-۲ عدد فرود^۱

این عدد نسبت جذر نیروی اینرسی به نیروی جاذبه (وزن) را بیان می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_r = \sqrt{\frac{Fi}{Fg}} = \sqrt{\frac{\rho L^3 V^3}{\rho g L^3}} = \sqrt{\frac{V^3}{gL}} = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad (۱۲-۶)$$

از جمله مواردی که در آنها کنترل اصلی جریان به عهده عدد فرود است، می‌توان جریان مایعات در کانال‌های باز، حرکت مایعات از درون دریچه‌ها و از بالای سرریزها، موج‌های حاصله در سطح آب، طراحی سازه‌های هیدرولیکی و در نتیجه حرکت کشتی‌ها و موارد مشابه آن را نام برد.

عدد فرود در جریان‌های با سطح آزاد مانند کانال‌های باز برای تقسیم‌بندی نوع جریان بسیار مهم است. اگر F_r کمتر از یک باشد، جریان زیر بحرانی، اگر F_r مساوی یک باشد، جریان بحرانی و اگر F_r بزرگ‌تر از یک باشد جریان فوق بحرانی خواهد بود.

۶-۶-۳ عدد ماخ^۲

در سال ۱۸۷۰، فیزیکدان اتریشی ارنست ماخ پارامتر زیر را معرفی کرد. این عدد نسبت جذر نیروی اینرسی به نیروی الاستیک (تراکم‌پذیری) را بیان می‌کند.

$$M = \sqrt{\frac{F_i}{F_e}} = \sqrt{\frac{\rho V^3 L}{EL}} = \sqrt{\frac{\rho V^3}{E}} = \sqrt{\frac{V^3}{\frac{E}{\rho}}} = \sqrt{\frac{V^3}{C^2}} = \frac{V}{C} \quad (۱۳-۶)$$

که در آن C سرعت صوت (یا موج) در یک سیال است. بنابراین عدد ماخ نسبت سرعت سیال (یا سرعت جسم در یک سیال ساکن) به سرعت موج صوتی در همان سیال است. از این عدد در مواردی مانند پدیده ضربه قوچ و همچنین در جریان‌های با سرعت زیاد که تغییرات جرم مخصوص در اثر فشار قابل توجه است، اهمیت فوق العاده‌ای می‌یابد و هر چه تراکم‌پذیری سیال کمتر باشد سرعت صوت در آن افزایش می‌یابد. در صورتی که عدد ماخ $Ma > 1$ باشد سرعت را ما فوق صوت و اگر $Ma < 1$ باشد سرعت را مادون صوت گویند.

۶-۶-۴ عدد اولر^۱

این عدد نسبت نیروی اینرسی به نیروی فشاری را بیان می‌کند:

$$Eu = \frac{F_i}{F_p} = \frac{\rho L^3 V^2}{\Delta P L^3} = \frac{\rho V^2}{\Delta P} \quad (۱۴-۶)$$

معمولاً از ضریب فشار که دو برابر عکس عدد اولر است استفاده می‌شود یعنی:

$$c_p = \frac{2\Delta P}{\rho V^2} \quad (۱۵-۶)$$

این عدد در جریان‌های دارای افت فشار و یا نیروی دراگ مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۶-۶-۵ عدد وبر^۲

این عدد نسبت نیروی اینرسی به نیروی کشش سطحی را بیان می‌کند.

$$We = \frac{F_i}{F_{st}} = \frac{\rho L^3 V^2}{\sigma L} = \frac{\rho L V^2}{\sigma} \quad (۱۶-۶)$$

عدد وبر فقط وقتی اهمیت دارد که مساوی یا کوچکتر از واحد باشد و سطح آزاد وجود داشته و در مقادیر بزرگ قابل صرفنظر است. مثل عبور دبی کم از سرریزها، قطرات جریان موینگی، جریان خون در رگ‌ها، موج‌های ناهموار، و مدل‌های هیدرولیکی کوچک.

برخی از اعداد بدون بعد مهم دیگر در مکانیک سیالات عبارتند از عدد کاویتاسیون، عدد پرانتل، عدد اکرت، عدد اشتروهال، نسبت زبری، نسبت گرمای ویژه، عدد گراشف، نسبت دما، ضریب فشار، ضریب بر او ضریب پسا.

۶-۷ تشابه، مطالعه مدل‌ها

برای اینکه در پروژه‌های بزرگ مهندسی ریسک وجود نداشته باشد و از هدر رفت سرمایه‌گذاری جلوگیری شود، معمولاً در این گونه موارد، قبل از احداث پروژه اصلی، نمونه مشابهی از آن را به صورت مدل تهیه کرده و بر روی آن مطالعه می‌کنند و نتایج حاصله را در مورد اصلاح پروژه اصلی، تعمیم می‌دهند. در هیدرولیک نیز استفاده از مدل‌ها معمول است و بسیاری از فرمول‌ها و روابط مهم هیدرولیکی، بر اساس تجربیات انجام شده بر روی مدل‌ها به دست آمده‌اند.

یکی از متداول‌ترین کاربرد مدل‌ها، به هنگام احداث سدها است. در این گونه موارد، ابتدا در آزمایشگاه یک سد کوچک بر روی رودخانه کوچکی مشابه با رودخانه اصلی احداث کرده و آن را مطالعه می‌کنند.

برای اینکه مدل ساخته شده، از هر جهت منعکس‌کننده نمونه اصلی باشد و بتوان نتایج حاصله از آن را در مورد نمونه اصلی تعمیم داد، باید تشابه کاملی بین مدل و نمونه اصلی، برقرار باشد. چنین تشابهی به نام تشابه هیدرولیکی خوانده می‌شود و تنها در چنین حالاتی است که می‌توان با اطمینان کافی، نتایج مربوط به مدل را از نمونه واقعی انتظار داشت. برای تامین تشابه هیدرولیکی لازم است که مدل و نمونه واقعی، از نقطه نظرهای هندسی، سینماتیکی و دینامیکی متشابه باشند.

۶-۷-۱ تشابه هندسی^۱

لازمه تشابه هندسی این است که مدل و نمونه اصلی در شکل یکسان باشند، اما در اندازه با هم تفاوت داشته باشند. در این حالت کلیه نسبت‌های ابعاد متناظر بین مدل و نمونه اصلی با هم برابر می‌باشند، یعنی اینکه نسبت ابعاد متناظر آن عدد ثابتی باشد. به

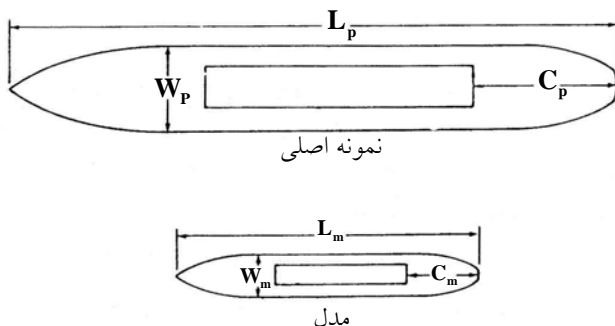
عبارت دیگر اگر مقیاس انتخابی $\frac{1}{10}$ باشد، تمام ابعاد خطی مدل باید $\frac{1}{10}$ نمونه اصلی باشند. بنابراین برای تشابه هندسی شکل ۴-۱ داریم: (۶-۱۶)

$$\text{نسبت تشابه هندسی } L_r = \frac{C_m}{C_p} = \frac{W_m}{W_p} = \frac{L_m}{L_p} = \frac{\text{طول مدل}}{\text{طول نمونه اصلی}} = \text{نسبت طولها}$$

که L_m, W_m, C_m ابعاد خطی مدل و L_p, W_p, C_p ابعاد خطی نمونه اصلی و L_r نسبت تشابه هندسی. در این روابط پانویس p, m به ترتیب مربوط به مدل (model) و اصل سازه (prototype) و L_r نسبت تشابه هندسی می‌باشد. همچنین می‌توان نوشت:

$$(۶-۱۷) \quad \frac{\text{نسبت مساحتها}}{\text{نسبت طولها}} = \frac{\text{مساحت}}{\text{مساحت نمونه اصلی}} = (L_r)^2 = \frac{L_m^2}{L_p^2} = L_r^2$$

$$(۶-۱۸) \quad \frac{\text{نسبت حجمها}}{\text{نسبت طولها}} = \frac{\text{حجم مدل}}{\text{حجم نمونه اصلی}} = (L_r)^3 = \frac{L_m^3}{L_p^3} = L_r^3$$



شکل ۴-۱ تشابه هندسی بین مدل و نمونه اصلی

کمیت‌های هندسی کمیت‌هایی هستند که در دیمانسیون آنها فقط بعد طول به کار رفته باشد مانند طول، سطح، حجم و ممان اینرسی.

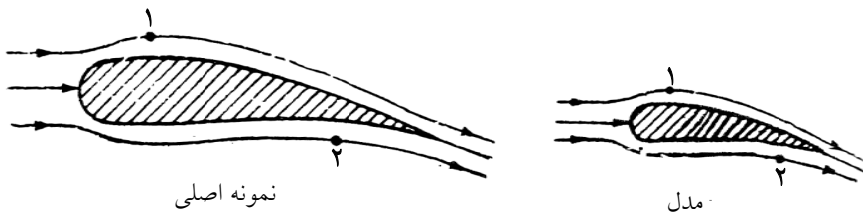
در تشابه هندسی لازم است که کلیه زوایا و جهت جریان حفظ شود و همچنین موقعیت مکانی مدل و نمونه اصلی نسبت به محیط اطراف یکسان باشد. تشابه هندسی

شامل ناصافی‌های واقعی سطح مدل و نمونه اصلی نیز می‌شود. اگر تمام ابعاد مدل یک دهم نمونه اصلی باشد، بایستی ارتفاع ناصافی‌های مدل نیز یک دهم ارتفاع ناصافی‌های نمونه اصلی باشد. تحقق تشابه هندسی کامل همیشه آسان نیست.

۶-۷-۲ تشابه سینماتیکی^۱ یا تشابه حرکت

اساس این تشابه یکسان بودن نسبت تشابه طولی و زمانی بین مدل و نمونه اصلی است به عبارت دیگر وقتی بین مدل و نمونه اصلی تشابه سینماتیکی وجود دارد که سرعت‌ها در نقاط متناظر مدل و نمونه اصلی هم جهت بوده و نسبت آنها برابر مقدار ثابتی باشد. مقدار ثابت برقرار شده بین سرعت‌ها را مقیاس سرعت می‌گویند و با V_r نشان می‌دهند. تشابه سینماتیکی در واقع بیانگر تشابه هندسی خطوط جریان در مدل و نمونه اصلی است.

$$V_r = \frac{V_m}{V_p} \quad (۶-۱۹)$$



شکل ۴-۲ تشابه سینماتیکی

کمیت‌های سینماتیکی کمیت‌هایی هستند که در دیمانسیون آنها علاوه بر بعد طول، بعد زمان نیز به کار رفته باشد مانند سرعت، شتاب، دبی و لزجت سینماتیکی. داریم:

$$\text{نسبت سرعت ها} = V_r = \frac{V_m}{V_p} = \frac{\left(\frac{L_m}{T_m}\right)}{\left(\frac{L_p}{T_p}\right)} = \frac{L_r}{T_r} \quad (۲۰-۶)$$

$$\text{نسبت شتاب ها} = a_r = \frac{a_m}{a_p} = \frac{\left(\frac{L_m}{T_m^2}\right)}{\left(\frac{L_p}{T_p^2}\right)} = \frac{L_r}{T_r^2} \quad (۲۱-۶)$$

$$\text{نسبت دبی} = Q_r = \frac{Q_m}{Q_p} = \frac{\left(\frac{L_m^3}{T_m}\right)}{\left(\frac{L_p^3}{T_p}\right)} = \frac{L_r^3}{T_r} \quad (۲۲-۶)$$

$$T_r = \frac{T_m}{T_p} \quad \text{شرط برقراری تشابه سینماتیکی است که می توان آن را مقیاس (نسبت)}$$

زمانی دانست.

مثال ۳-۶: مدلی با مقیاس طولی $\frac{1}{50}$ جهت مطالعه جذر و مد امواج ساخته شده

است. طول زمان لازم برای مدل که معادل یک شبانه روز نمونه اصلی باشد (برحسب ساعت) چقدر است؟

$$\frac{T_m}{T_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \Rightarrow \frac{T_m}{24} = \sqrt{\frac{1}{50}} \Rightarrow T_m = 1/0.7 \text{ ساعت}$$

مثال ۴-۶: مدل سدی با مقیاس $\frac{1}{49}$ برای پیشبینی شرایط جریان در نمونه اصلی

ساخته شده است. اگر دبی طراحی سیل در سرزیر سد $\frac{15000 \text{ m}^3}{\text{s}}$ باشد، برای تشابه جریان بین مدل و نمونه اصلی، دبی جریان در مدل چقدر باید باشد؟ اگر سرعت در یک نقطه از مدل $\frac{12 \text{ m}}{\text{s}}$ باشد، سرعت در نقطه متناظر در نمونه اصلی چقدر است؟

$$Fr_m = Fr_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

دوطرف رابطه فوق را در $\frac{A_m}{A_p}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{V_m A_m}{V_p A_p} = \frac{A_m}{A_p} \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \Rightarrow \frac{Q_m}{Q_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{\frac{5}{2}}$$

$$Q_m = 15000 \times \left(\frac{1}{49} \right)^{\frac{5}{2}} = 0.892 m^3/s$$

برای محاسبه سرعت در نمونه اصلی داریم:

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \Rightarrow V_p = V_m \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = 1/2 \times \sqrt{\frac{49}{1}} \Rightarrow V_p = 8/2 m/s$$

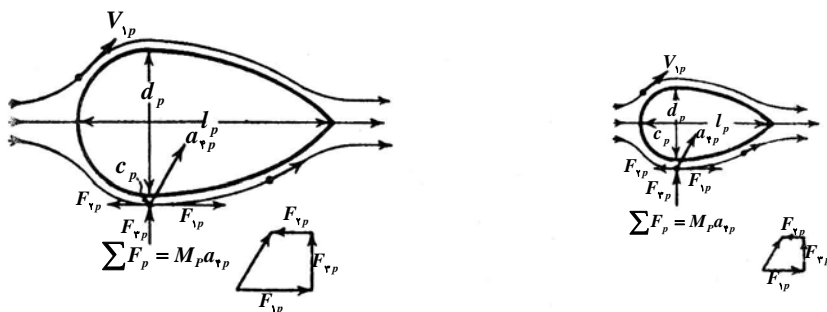
۳-۷-۶ تشابه دینامیکی^۱

وقتی بین مدل (m) و نمونه اصلی (p) تشابه دینامیکی وجود دارد که اولاً بین آنها تشابه هندسی و سینماتیکی برقرار باشد ثانیاً نسبت ثابتی بین نیروهای موثر بر قسمت‌های متناظر مدل و نمونه واقعی، برقرار باشد. مقدار ثابت برقرار شده بین نیروها را مقیاس نیرو می‌گویند و با F_r نشان می‌دهند.

$$F_r = \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} = \frac{(F_v)_m}{(F_v)_p} = \dots = \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} \quad (23-6)$$

بنابراین برای تشابه دینامیکی لازم است که این اعداد بی‌بعد یا نسبت‌های بی‌بعد، در مورد مدل و نمونه واقعی یکسان باشند.

$$\begin{aligned} \frac{(F_g)_m}{(F_g)_p} &= \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} \rightarrow \left(\frac{F_i}{F_g} \right)_m = \left(\frac{F_i}{F_g} \right)_p \rightarrow (Fr)_m = (Fr)_p \\ \frac{(F_v)_m}{(F_v)_p} &= \frac{(F_i)_m}{(F_i)_p} \rightarrow \left(\frac{F_i}{F_v} \right)_m = \left(\frac{F_i}{F_v} \right)_p \rightarrow (Re)_m = (Re)_p \end{aligned} \quad (24-6)$$



شکل ۳-۴ تشابه دینامیکی بین مدل و نمونه اصلی

کمیت‌های دینامیکی کمیت‌هایی هستند که در دیمانسیون آنها علاوه بر ابعاد طولی و زمان، بعد جرم نیز بکار رفته باشد، مانند نیرو، جرم مخصوص، فشار، انرژی، لزجت دینامیکی و

برای تشابه دینامیکی لازم است که نسبت ثابتی بین نیروهای مؤثر بر سیال (نیروهای اینرسی، لزجت، شتاب ثقل، کشش سطحی، الاستیسیته و فشاری) بر قسمت‌های متناظر مدل و نمونه اصلی برقرار باشد این نسبت‌ها همان اعداد بدون بعد رینولدز، فرود، وبر، ماخ و اولر می‌باشند. بنابراین در صورت یکسان بودن این اعداد بدون بعد، در مدل و نمونه اصلی تشابه دینامیکی وجود دارد. در برخی شرایط هر سه نیروی لزجت، ثقل و اینرسی در بررسی یک مسئله اهمیت قابل توجهی دارند در چنین شرایطی عدد رینولدز و عدد فرود مدل و نمونه اصلی باید به‌طور همزمان در تحلیل مسئله مورد استفاده قرار گیرند. مقایسه روابط $(Re)_m = (Re)_p$ با $(Fr)_m = (Fr)_p$ نشان می‌دهد که این دو رابطه نمی‌توانند به‌طور همزمان برای سیالات با لزجت یکسان بکار برده شوند در نتیجه برای حل این مشکل لازم است که از سیالات با لزجت متفاوت استفاده کرد. حل همزمان دو رابطه فوق منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (۲۵-۶)$$

در اغلب مسائل بیشتر این اعداد دارای اهمیت نبوده و فقط یک یا دو عدد بدون بعد دارای اهمیت می‌باشند و از بقیه صرف‌نظر می‌شود. مثلاً در سیالات تراکم‌ناپذیر،

نیروی الاستیک صفر است. در صورتی که سطح مایع و گاز وجود نداشته باشد نیروی کشش سطحی صفر خواهد بود و در اغلب مسائل فقط نیروهای لزجت، اینرسی، فشار و ثقل (اعداد رینولدز، فرود و اولر) نقش اصلی را دارا خواهند بود.

مثال ۵-۶: اگر مقیاس مدل فیزیکی کانال رو بازی با مقیاس هندسی ۱:۱۰ ساخته شود، مقیاس نیرو چقدر خواهد بود؟

حل: می‌دانیم:

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{10}$$

چون مساله در مورد کانال باز است، بنابراین از عدد فرود استفاده می‌کنیم. برای داشتن تشابه سینماتیکی باید عدد فرود مدل و نمونه اصلی مساوی باشد:

$$(Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{gL_p}} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

همچنین می‌دانیم:

$$F = ma = (\rho \nabla) a = \rho L^\gamma L T^{-\gamma} \Rightarrow F = \rho L^\gamma V^\gamma$$

بنابراین:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{\rho_m L_m^\gamma V_m^\gamma}{\rho_p L_p^\gamma V_p^\gamma} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم سیال مورد استفاده برای مدل و نمونه اصلی در این مثال آب باشد، بنابراین $\rho_m = \rho_p$ خواهد بود. در نتیجه رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{L_m^\gamma V_m^\gamma}{L_p^\gamma V_p^\gamma}$$

می‌دانیم $\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{F_m}{F_p} = \frac{L_m^\gamma L_m^\gamma}{L_p^\gamma L_p^\gamma} = \frac{L_m^\gamma}{L_p^\gamma} = \left(\frac{1}{10}\right)^\gamma \Rightarrow \frac{F_m}{F_p} = \frac{1}{1000}$$

مثال ۶-۶: مقیاس سرعت، زمان، شتاب و دبی حجمی را در تشابه فرود به دست

آورید؟

$$(Fr)_m = (Fr)_p \rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} \rightarrow V_r = \sqrt{L_r} \quad \text{سرعت} \quad (\text{الف})$$

$$V_r = \frac{L_r}{t_r} \rightarrow \sqrt{L_r} = \frac{L_r}{t_r} \rightarrow t_r = \sqrt{L_r} \quad \text{زمان} \quad (\text{ب})$$

$$a_r = \frac{V_r}{t_r} \rightarrow a_r = \frac{\sqrt{L_r}}{\sqrt{L_r}} \rightarrow a_r = 1 \quad \text{شتاب} \quad (\text{ج})$$

$$Q_r = V_r \cdot A_r = \sqrt{L_r} \times L_r \rightarrow Q_r = L_r \quad \text{زمان} \quad (\text{د})$$

۸-۶ مدل‌های کج

اگر در مدل‌سازی سیستم‌های هیدرولیکی، مقیاس طولی در همه جهات با هم برابر نباشد و در جهتی، بنا به دلایلی مقیاس طولی با دیگر جهات متفاوت باشد مدل راکج می‌نامند.

برای مثال مقیاس افقی و قائم در مدل یک رودخانه نمی‌تواند یکسان باشد، زیرا عمق آب ممکن است تا حدی کم شود که اثرات لزجت و کشش سطحی مهم باشند. همچنین برای ایجاد تناسب بین زبری سطح یک مدل فیزیکی با نمونه اصلی ممکن است زبری در مدل قدری کاهش یابد که عملاً سطح آن دارای زبری سطح نمونه اصلی شود. همین‌طور اگر شیب بستر در یک مدل فیزیکی برای ایجاد تناسب بین مدل و نمونه اصلی خیلی کاهش یابد، جریان آشفته در نمونه اصلی به جریان آرام در مدل آزمایشگاهی تبدیل خواهد شد. در چنین شرایطی بهتر است از مدل‌های کج استفاده شود. یعنی مدل‌هایی که در آنها مقیاس قائم $(z_r = z_m / z_p)$ بزرگ‌تر از مقیاس افقی $(x_r = x_m / x_p)$ است زیرا در غیر این صورت، برای تشابه هندسی کامل بین مدل و

نمونه اصلی، اندازه متغیرها و مقیاس قائم به حدی کوچک می‌شود که دیگر نمی‌توان آن را با دقت مناسب اندازه‌گیری کرد. برای مثال اگر مقیاس افقی و قائم در یک رودخانه یکسان باشد، هنگامی که عرض رودخانه در مدل چند متر است، عمق آب در آن چند میلی‌متر خواهد بود. برای حل این مشکل، مقیاس قائم بزرگ‌تر از مقیاس افقی

در نظر گرفته می‌شود. در این شرایط اگرچه بین مدل و نمونه اصلی تشابه هندسی برقرار است ولی مدل با عمق آبی که از تشابه هندسی پیروی نمی‌کند، کار می‌کند، به عبارت دیگر در مدل‌های کج، مقیاس ابعاد خطی در راستای افقی همان مقیاس مدل فیزیکی به نمونه اصلی است و نسبت عمق آب روی مدل به عمق آب روی نمونه اصلی دارای مقیاس قائم است.

نکات:

برای محاسبه سرعت آب در یک نقطه از نمونه اصلی با در دست داشتن سرعت نقطه متناظر در مدل کج، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$V_P = V_m \sqrt{\left(\frac{L_p}{L_m}\right)_{\text{قائم}}} \quad (۲۶-۶)$$

برای محاسبه دبی جریان در یک نمونه اصلی با در دست داشتن دبی مدل کج، از رابطه ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q_P = Q_m \times \left(\frac{L_p}{L_m}\right)_{\text{افقی}} \times \left(\frac{L_p}{L_m}\right)_{\text{قائم}}^{۱/۵} \quad (۲۷-۶)$$

مثال ۶-۷: مدل سرریز یک سد با مقیاس $\frac{1}{10}$ آب را با سرعت ۱ m/s تحت بار تخلیه می‌کند اگر بار آب روی نمونه اصلی $۵/۵\text{ m}$ باشد، سرعت آب در نمونه اصلی چقدر خواهد بود؟

حل: براساس صورت مسأله می‌دانیم که

$$\left(\frac{L_p}{L_m}\right)_{\text{قائم}} = \frac{H}{h} = \frac{۵/۵\text{ m}}{۰/۱\text{ m}} = ۵۵$$

بنابراین سرعت آب در نمونه اصلی برابر است با:

$$V_P = V_m \sqrt{\left(\frac{L_p}{L_m}\right)_{\text{قائم}}} = ۱ \times \sqrt{۵۵} \Rightarrow V_P = ۷/۴۱\text{ m/s}$$

۹-۶ نمونه‌هایی از مطالعه مدل‌ها

مدل‌ها برای مطالعه مسئله‌های مختلف مکانیک سیالات به کار می‌روند و مشکل است

که یک حالت کلی برای تمام مسائل مکانیک سیالات تعریف کرد. زیرا هر مسئله خصوصیات و شرایط خاص خود را دارد. اما به طور کلی می توان بسیاری از مسائل را برحسب طبیعت جریان دسته بندی کرد: نوع اول جریان هایی که بدون سطح آزاد اند همانند جریان در داخل مرزها مثلاً جریان در داخل لوله ها، اتصالات، شیرها یا همانند جریان اطراف اجسام و تنها اثر مهم که باید بین مدل و نمونه اصلی ثابت نگه داشته شود، عدد رینولدز است نوع دوم جریان هایی اند که سطح آزاد داشته مانند سرریزها، کانال ها، رودخانه ها و اطراف کشتی ها که اثر نیرویی جاذبه مهم است. در این حالتها، عدد فرود مهم است.

۹-۱ جریان در لوله

در مجاری بسته رابطه اصلی تشابه دینامیکی عدد رینولدز است. بنابراین مقدار عدد رینولدز در مدل و سازه اصلی باید با هم برابر باشند. برای آزمایش سیالاتی که لزجت سینماتیکی یکسانی را در مدل و نمونه اصلی دارند، بایستی حاصلضرب VD یکسان باشد. اغلب چنین الزامی باعث می شود که در مدل های کوچک، سرعت ها خیلی زیاد باشند.

عدد رینولدز به شکل زیر نوشته می شود:

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad \text{یا} \quad Re = \frac{\rho VD}{\mu} \quad (۶-۲۸)$$

سپس نسبت سرعت ها در مدل و سازه اصلی به شکل زیر استخراج می شود:

$$(Re)_m = (Re)_p \\ \frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p} \quad (۶-۲۹)$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{D_p}{D_m} \times \frac{\nu_m}{\nu_p}$$

مثال ۶-۸: آب در دمای $20^\circ C$ با سرعت $3 \frac{m}{s}$ در یک لوله ی صاف به قطر 2.0 cm

جریان پیدا می کند. سرعت هوای $30^\circ C$ را در شرایط استاندارد، در یک لوله صاف به قطر 1.0 cm به نحوی محاسبه کنید که تشابه دینامیکی برقرار شود.

$$(Re)_{\text{آب}} = (Re)_{\text{هو}}$$

$$\left(\frac{VD}{\nu}\right)_{\text{آب}} = \left(\frac{VD}{\nu}\right)_{\text{هو}}$$

$$V_{\text{هو}} = V_{\text{آب}} \left(\frac{D_{\text{آب}}}{D_{\text{هو}}}\right) \left(\frac{\nu_{\text{هو}}}{\nu_{\text{آب}}}\right) = 3 \times \left(\frac{20}{10}\right) \times \left(\frac{1/51 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-6}}\right) = 90/6 \text{ m/s}$$

حل:

مثال ۶-۹: آب در لوله‌ای به قطر ۶۰۰ میلی لیتر و با سرعت ۰/۵ متر بر ثانیه در

جریان است. اگر مقیاس مدل در آزمایشگاه $\frac{1}{10}$ باشد، برای برقراری تشابه دینامیکی،

دبی جریان آب در آزمایشگاه برحسب لیتر بر ثانیه چقدر است؟

حل: چون بحث از دبی جریان در لوله است، بنابراین از تساوی عدد رینولدز

مدل و نمونه اصلی استفاده می‌کنیم:

$$(Re)_m = (Re)_p \Rightarrow \frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p}$$

$$V_m = V_p \frac{D_p}{D_m}$$

که در آن D_m, D_p به ترتیب قطر لوله نمونه اصلی و مدل می‌باشند. همچنین

چون از آب برای مدل و نمونه اصلی استفاده می‌شود، بنابراین $\nu_m = \nu_p$ است. در

نتیجه از رابطه (۱) داریم:

$$V_m = 0/5 \times 10 \Rightarrow V_m = 5 \text{ m/s}$$

سرعت آب در مدل

همچنین می‌دانیم قطر لوله در آزمایشگاه

$$\frac{D_p}{D_m} = 10 \Rightarrow \frac{0/6}{D_m} = 10 \Rightarrow D_m = 0/06 \text{ m}$$

$$Q_m = \frac{\pi (D_m^2)}{4} \times V_m = \pi \times \frac{(0/06)^2}{4} \times 5 = 0/014 \text{ m}^3/\text{s} = 14 \text{ liter/s}$$

۶-۹-۲ سازه‌های هیدرولیکی باز

معمولاً سازه‌های کانال‌های روباز مانند کانال‌ها، رودخانه‌ها، مخازن سدها، حرکت امواج،

سرریزها و حوضچه‌های آرامش، نیروی ثقل نسبت به سایر نیروها از اهمیت بیشتری

برخوردار است، لذا مبنای تشابه سینماتیکی و دینامیکی عدد فرود خواهد بود. بنابراین:

$$\begin{aligned} (F_r)_m &= (F_r)_p \\ \left(\frac{V}{\sqrt{gL}} \right)_m &= \left(\frac{V}{\sqrt{gL}} \right)_p \end{aligned} \quad (۳۰-۶)$$

در این رابطه V سرعت و L یک طول عمودی (که معمولاً در کانال‌ها عمق آب و یا عمق هیدرولیکی است) و g شتاب ثقل است. چون شتاب ثقل در نمونه اصلی و اصل یکی است و نمی‌تواند متفاوت باشد، لذا دو طرف رابطه حذف می‌شوند. پس خواهیم داشت:

$$\frac{V_m}{\sqrt{L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{L_p}} \quad (۳۱-۶)$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}}$$

اگر مدل معمولی (یا غیرکج) باشد خواهیم داشت:

$$\frac{L_p}{L_m} = L_r \quad (۳۲-۶)$$

بنابراین نسبت سرعت‌ها با ریشه دوم مقیاس L_r تغییر می‌کند.

$$V_p = V_m \sqrt{L_r} \quad (۳۳-۶)$$

زمان مربوط به انجام وقایع (مثلاً زمان عبور یک ذره از گذرگاه) بوسیله روابط زیر به هم ارتباط پیدا می‌کنند.

$$T_m = \frac{L_m}{V_m} \quad T_p = \frac{L_p}{V_p} \quad T_p = T_m \frac{L_p}{L_m} \frac{V_m}{V_p} = T_m \sqrt{L_r} \quad (۳۴-۶)$$

نسبت دبی‌ها برابر است با:

$$\frac{Q_p}{Q_m} = \frac{L_p^{5/3} / T_p}{L_m^{5/3} / T_m} = L_r^{5/3} \quad (۳۵-۶)$$

نسبت نیروها (مثلاً نیروی وارد بر دریچه‌ها) عبارت است از:

$$\frac{F_P}{F_m} = \frac{\gamma h_P L_P^3}{\gamma h_m L_m^3} = L_r^3 \quad (۳۷-۶)$$

که در رابطه فوق h ارتفاع است. به طریقی مشابه می‌توان نسبت‌های وابسته دیگری را نیز به‌دست آورد، به‌طوری که نتایج حاصل از مدل بتواند عملکرد نمونه اصلی را پیش‌بینی و تفسیر کند.

مثال ۶-۱۰: در یک آزمایش، برای اندازه‌گیری نیروی موج وارد بر یک شناور که با سرعت ۲۰ m/s روی سطح دریا حرکت می‌کند، مدل $\frac{1}{10}$ آن را در یک استخر می‌سازند برای تشابه دو حالت، سرعت مدل چقدر خواهد بود؟

$$(Fr)_m = (Fr)_p \rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{Lg}} \right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{Lg}} \right)_p$$

$$V_m = V_p \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = V_p \sqrt{L_r} = ۲۰ \times \sqrt{\frac{1}{10}} = ۲\sqrt{10} = ۶/۳۲ \text{ m/s}$$

مثال ۶-۱۱: مدل فیزیکی سرریز سدی با مقیاس طول $\frac{1}{30}$ ساخته شده است.

سرعت حرکت آب در نقطه‌ای از مدل $\frac{0.6}{s} \text{ m}$ و دبی عبوری $\frac{0.05}{s} \text{ m}^3$ است. سرعت در نقطه متناظر و دبی عبوری از سرریز اصلی چقدر است؟

$$\frac{L_m}{L_p} = \frac{1}{30}$$

حل: می‌دانیم است.

$$(Fr)_m = (Fr)_p \Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{gh_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{gh_p}}$$

$$\frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{h_m}{h_p}} \Rightarrow \frac{0.6}{V_p} = \sqrt{\frac{1}{30}} \Rightarrow V_p = ۳/۲۹ \text{ m/s}$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{A_m V_m}{A_p V_p} = \left(\frac{1}{30} \right)^3 \times \left(\sqrt{\frac{1}{30}} \right) \Rightarrow Q_p = ۲۴۶/۵ \text{ m}^3/s$$

مثال ۶-۱۲: مدل سرریزی با مقیاس $\frac{1}{50}$ ساخته شده است. اگر دبی طراحی سرریز m^3/s ۱۷۰۰۰ باشد، دبی سرریز مدل برحسب m^3/s برای ایجاد تشابه دینامیکی چقدر است؟

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{\left(\frac{L_m}{T_m}\right)}{\left(\frac{L_p}{T_p}\right)} = \frac{L_m}{L_p} \times \frac{T_p}{T_m} \quad \text{حل:}$$

$$\text{می دانیم } \frac{T_p}{T_m} = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} \text{ است، بنابراین:}$$

$$\frac{Q_m}{Q_p} = \frac{L_m}{L_p} \times \sqrt{\frac{L_p}{L_m}} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{Q_m}{17000} = \left(\frac{1}{50}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow Q_m = 0.96 m^3/s$$

مجموعه سوالات آنالیز ابعادی و تشابه

۱. دیمانسیون فشار و دبی بترتیب عبارتند از.....

$$\begin{array}{ll} (1) & LT^{-2}, ML^{-1}T^{-1} \\ (2) & L^2T^{-1}, ML^{-1}T^{-2} \\ (3) & L^2T, MLT^{-2} \\ (4) & L^2T^{-2}, ML^2T^{-2} \end{array}$$

۲. مدل یک هواپیما با نسبت $\frac{1}{36}$ ساخته شده است، اگر سرعت و دبی جریان در مدل به ترتیب $\frac{ft}{s}$ ۱/۲۵ و $\frac{ft^3}{s}$ ۲/۵ باشد، سرعت و دبی جریان در جسم واقعی چقدر است؟

$$\begin{array}{ll} (1) & 19440 \text{ cft}, 45 \frac{ft}{s} \\ (2) & 540 \text{ cft}, 7/5 \frac{ft}{s} \\ (3) & 19440 \text{ cft}, 7/5 \frac{ft}{s} \\ (4) & 540 \text{ cft}, 45 \frac{ft}{s} \end{array}$$

۳. واحد لزجت سینماتیک (Kinematic Viscosity) براساس کدام معادله ابعادی بیان می شود؟

$$FL^{-1}T \quad (۲) \qquad LT^{-1} \quad (۱)$$

$$LT^{-1} \quad (۴) \qquad ML^{-1}T^{-1} \quad (۳)$$

۴. دیمانسیون عدد رینولدز کدام است؟

$$FL^{-1}T \quad (۲) \qquad MLT^{-1} \quad (۱)$$

$$LT^{-1} \quad (۴) \qquad ML^{-1}T^{-1} \quad (۳)$$

۵. در صورتی که تنش برشی مایعات برابر $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ باشد دیمانسیون ضریب لزجت

دینامیکی کدامیک است؟

$$\mu = ML^{-1} \quad (۲) \qquad \mu = ML^{-1}T^{-1} \quad (۱)$$

$$\mu = ML^{-1}T^{-1} \quad (۴) \qquad \mu = ML^{-1}T^1 \quad (۳)$$

۶. عدد رینولدز (Re) را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

(۱)نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزوجت

(۲)نسبت نیروی اینرسی به نیروی ثقل

(۳)نسبت نیروی اینرسی به نیروی اختلاف فشار

(۴)نسبت نیروی لزوجت به نیروی اختلاف فشار

۷. کدامیک از ابعاد فیزیکی زیر مربوط به ضریب گرانروی مطلق می باشد؟

$$\frac{F.T}{L} \quad (۲) \qquad \frac{F.T^2}{L^2} \quad (۱)$$

$$\frac{F.T}{L^2} \quad (۴) \qquad \frac{F.T}{L^1} \quad (۳)$$

۸. معادله ابعادی کشش سطحی کدام است؟

$$FL^2 \quad (۲) \qquad FL \quad (۱)$$

$$FL^{-2} \quad (۴) \qquad FL^{-1} \quad (۳)$$

۹. معادله ابعاد لزجت (Viscosity) کدام است؟

$$FLT^{-2} \quad (۲) \qquad FL^{-1}T \quad (۱)$$

$$FL^{-2}T \quad (۴) \qquad FLT^2 \quad (۳)$$

۱۰. ترکیب بدون بعد از کمیت های جرم مخصوص ρ و مدول الاستیسیته حجمی E و

سرعت جریان کدام است؟

$$(۱) \quad \rho V^2 / E$$

$$(۲) \quad E^2 / \rho V$$

$$(۳) \quad \rho E / V^2$$

$$(۴) \quad \rho^2 / EV$$

۱۱. در مدل سرریزی L_r نسبت مقیاس ساخت براساس تشابه قانون فرود می باشد، نسبت توان ها برابر است با:

$$(۱) \quad L_r^{3/2}$$

$$(۲) \quad L_r^4$$

$$(۳) \quad L_r^{5/2}$$

$$(۴) \quad L_r^{9/2}$$

۱۲. در مدل بامقیاس $\frac{1}{50}$ سرریزی، دبی اندازه گیری شده $\frac{m^3}{s} / 0.5$ می باشد. مطابق نمونه اصلی دبی برحسب $\frac{m^3}{s}$ چقدر است؟

$$(۱) \quad ۱۷۷$$

$$(۲) \quad ۶۲۵$$

$$(۳) \quad ۸۸۴۰$$

$$(۴) \quad ۱۷۶۸۰$$

۱۳. عملکرد یک سازه هیدرولیکی در طی یک سیل از روی یک مدل $\frac{1}{16}$ که براساس تشابه قانون فرود ساخته شده، مطالعه می شود. یک موج سیل در حال عبور از طریق مدل در عرض ۲ ساعت مطابق با دوره تناوب نمونه اصلی می باشد.

$$(۱) \quad \frac{1}{2} \text{ ساعت}$$

$$(۲) \quad ۸ \text{ ساعت}$$

$$(۳) \quad ۱۶ \text{ ساعت}$$

$$(۴) \quad ۳۲ \text{ ساعت}$$

۱۴. در صورتی که مایع یکسانی در هر دو مدل و نمونه اصلی استفاده شود، برای شرایطی که عدد رینولدز و عدد فرود در مدل و در نمونه اصلی مساوی باشند، نسبت مقیاس مدل برابر است با: (که در اینجا V_r نسبت سرعت است؟

$$(۱) \quad V_r$$

$$(۲) \quad ۱$$

$$(۳) \quad V_r^{1/2}$$

$$(۴) \quad \frac{1}{2}$$

۱۵. مدلی از یک زیر دریایی با نسبت مقیاس L_r وجود دارد که جهت شباهت داشتن با شرایط نمونه اصلی در آب دریا با طناب کشیده می شود. با همان سرعت نسبت

مقاومت کل مدل به مقاومت کل نمونه اصلی برابر است با:

$$L_r \quad (۲) \quad L_r^* \quad (۱)$$

$$L_r^{-5/2} \quad (۴) \quad ۱ \quad (۳)$$

۱۶. چه تعداد پارامتر برای بیان نمایش فیزیکی به طور ریاضی یا $F(a, v, t, U, L)$ لازم می باشد؟ که در اینجا A مساحت، V سرعت، T زمان، U ویسکوزیته سینماتیکی و L طول است.

$$۴ \quad (۲) \quad ۵ \quad (۱)$$

$$۲ \quad (۴) \quad ۳ \quad (۳)$$

۱۷. یک کانال روباز با نسبت مقیاس افقی L_H و نسبت مقیاس عمودی L_V ساخته

می شود. نسبت دبی $\frac{Q_m}{Q_P}$ تعیین می شود بوسیله:

$$L_H L_V^{3/2} \quad (۲) \quad L_H^* L_V^* \quad (۱)$$

$$L_H^* L_V^{3/2} \quad (۴) \quad L_H^* L_V^{3/2} \quad (۳)$$

۱۸. تشابه حرکت بین مدل و جسم اصلی نامیده می شود به عنوان:

$$(۱) \text{ تشابه هندسی} \quad (۲) \text{ تشابه سینماتیکی}$$

$$(۳) \text{ تشابه دینامیکی} \quad (۴) \text{ تشابه استاتیکی}$$

۱۹. مدل سرریزی با تشابه هندسی به مقیاس ۱:۱ ساخته می شود. دبی متناظر در جسم

اصلی m^3/s ۱۰۲۴ است، دبی در این مدل برحسب m^3/s خواهد بود:

$$۱۶ \quad (۲) \quad ۱ \quad (۱)$$

$$۶۴ \quad (۴) \quad ۱۲ \quad (۳)$$

۲۰. مدل یک رودخانه با مقیاس افقی ۱:۱۰۰۰ و مقیاس عمودی ۱:۱۰۰ ساخته می شود.

در صورتی که دبی مدل m^3/s ۰/۱ باشد، بنابراین دبی در رودخانه برحسب

m^3/s خواهد بود:

$$۱۰^4 \quad (۲) \quad ۱۰^2 \quad (۱)$$

$$۱۰^6 \quad (۴) \quad ۱۰^5 \quad (۳)$$

۲۱. در صورتی که دو مدل با تشابه هندسی دارای نسبت مقیاس L_r در یک آزمایشگاه

معین با عدد فرود یکسان بهره‌برداری شوند، بنابراین شتاب متناظر خواهد بود با نسبت:

$$L_r \quad (۲) \quad L_r^{1/5} \quad (۱)$$

$$۱ \quad (۴) \quad L_r^{1/5} \quad (۳)$$

۲۲. در مدل تغییر شکل یافته یک رودخانه نسبت‌های مقیاس افقی و عمودی به ترتیب L_H و L_V می‌باشند. نسبت دبی برابر خواهد بود:

$$L_H L_V^{3/2} \quad (۲) \quad L_H^{1/2} L_V^3 \quad (۱)$$

$$L_H L_V^{3/2} \quad (۴) \quad L_H^3 L_V^{1/2} \quad (۳)$$

۲۳. مدل یک سرریز ساخته شده با مقیاس افقی $\frac{1}{40}$ و مقیاس عمودی $\frac{1}{9}$ دبی $\frac{1}{9} \text{ liter/s}$ را تخلیه می‌کند. بنابراین دبی در جسم اصلی تخمین زده می‌شود.

$$۱۰۸ \text{ liter/s} \quad (۲) \quad \frac{1}{9} \text{ liter/s} \quad (۱)$$

$$۱۰۸۰۰ \text{ liter/s} \quad (۴) \quad ۱۰۸۰ \text{ liter/s} \quad (۳)$$

۲۴. مدل فیزیکی سرریز سدی با مقیاس طولی $\frac{1}{30}$ ساخته شده است. سرعت حرکت آب در نقطه‌ای از مدل $\frac{m}{s}$ و دبی عبوری $\frac{m^3}{s}$ می‌باشد. سرعت در نقطه متناظر و دبی عبوری از سرریز چقدر است؟

$$\frac{۸}{۲} \frac{m}{s}, ۱۸ \frac{m^3}{s} \quad (۲) \quad \frac{۲۴۶۵}{s}, ۱۸ \frac{m^3}{s} \quad (۱)$$

$$\frac{۲۴۶۵}{s}, \frac{۳}{۲۹} \frac{m^3}{s} \quad (۴) \quad \frac{۸}{۲} \frac{m}{s}, \frac{۳}{۲۹} \frac{m^3}{s} \quad (۳)$$

۲۵. در صورتی که بدانیم نیروی برش در واحد سطح τ ، در یک جریان آشفته تابعی از قطر لوله D ، زبری مطلق جدار لوله K ، سرعت جریان مایع V ، جرم مخصوص مایع ρ و لزجت دینامیکی مایع (ویسکوزیته دینامیکی)

μ می‌باشد، فرم عمومی معادله τ با کدامیک از روابط زیر بیان می‌شود؟

$$\tau = \rho v^2 \phi\left(\frac{\mu}{\rho v d}, d\right) \quad (۲) \quad \tau = \rho v^2 \phi\left(\frac{\mu}{\rho v d}, \frac{k}{d}\right) \quad (۱)$$

$$\tau = \rho v^2 \phi(k) \quad (۴) \quad \tau = \rho v^2 \phi\left(\frac{\mu}{\rho v d}\right) \quad (۳)$$

۲۶. اگر برای ساخت مدل هیدرولیکی از یک جسم اصلی نیروهای لزجت و ثقل،

نیروهای اصلی باشند برای وقتی که سیال مدل و جسم اصلی یکی هستند کدام عبارت برای ایجاد تشابه کامل، صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} U_r = L_r^{\frac{1}{2}} & L_r = U_r^{\frac{1}{2}} \quad (۱) \\ U_r = L_r & L_r = ۱ \quad (۳) \end{array}$$

۲۷. مدل سرریزی با نسبت $L_r = \frac{1}{50}$ و دبی طراحی سرریز $17000 \text{ m}^3/\text{s}$ ساخته می‌شود. دبی سرریز مدل برحسب متر مکعب در ثانیه برای تشابه دینامیکی را از بین گزینه‌های زیر انتخاب کنید؟

$$\begin{array}{ll} ۰/۹۶ \quad (۲) & ۴۸/۱ \quad (۱) \\ ۶/۸ \quad (۴) & ۰/۱۴ \quad (۳) \end{array}$$

۲۸. در مدل آزمایشگاهی یک بندرگاه با مقیاس $\frac{1}{400}$ (برای مطالعه جریان‌های جذر و مدی) نسبت زمان واقعی جذر و مدی به زمان جذر و مدی در آزمایشگاه چقدر می‌باشد؟

$$\begin{array}{ll} ۱۰\sqrt{2} \quad (۲) & ۵\sqrt{2} \quad (۱) \\ ۳۰۰ \quad (۴) & ۲۰۰ \quad (۳) \end{array}$$

۴) در صورتی که خواص فیزیکی دو سیال در آزمایشگاه و واقعیت یکی باشد این نسبت برابر ۱ می‌باشد.

۲۹. آب در لوله‌ای به قطر ۶۰۰ میلی‌لیتر و با سرعت ۰/۵ متر بر ثانیه در حال جریان است. مدلی با مقیاس ۱:۱۰ در آزمایشگاه ساخته می‌شود. در صورتی که سیال استفاده شده در آزمایشگاه آب باشد، برای برقراری تشابه دینامیکی، دبی لوله در آزمایشگاه برحسب لیتر بر ثانیه کدام است؟

$$\begin{array}{ll} ۱۴ \quad (۱) & ۹/۲ \quad (۲) \\ ۷/۱ \quad (۳) & ۱۱ \quad (۴) \end{array}$$

۳۰. کدام یک از تعاریف زیر صحیح است؟

- (۱) عدد فرود نسبت نیروی الاستیسیته به نیروی ثقل را بیان می‌کند.
- (۲) عدد وبر نسبت نیروی ثقل به نیروی کشش سطحی را بیان می‌کند.
- (۳) عدد ماخ نسبت نیروی ثقل به نیروی لزجت را بیان می‌کند.

۴) عدد رینولدز نسبت نیروی اینرسی به نیروی لزجت را بیان می‌کند.

۳۱. سرعت جریان آب در روی مدل تاج سرریزی با مقیاس ۱:۲۵ برابر با 0.6 m/s است. سرعت جریان در روی تاج سرریز (اصلی) چندمتر بر ثانیه خواهد بود؟

(۲) ۸

(۱) ۳

(۴) ۰/۱۲

(۳) ۱۵

۳۲. با فرض ثابت بودن شتاب ثقل در مدل و طبیعت، رابطه‌ی بین نسبت لزجت

سینماتیکی مدل به جسم واقعی، $\frac{v_m}{v_p}$ در صورتی که معیار شبیه سازی بر مبنای استفاده توأم از قانون رینولدز و قانون فرود باشد (عدد رینولدز و فرود مدل و طبیعت یکی باشد) برابر است با:

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۲)$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right) \quad (۱)$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (۴)$$

$$\frac{v_m}{v_p} = \left(\frac{L_m}{L_p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (۳)$$

۳۳. کدام تعریف در مورد عدد وبر صحیح است؟

(۱) نسبت نیروی اینرسی بر نیروی ویسکوز است.

(۲) نسبت نیروی اینرسی بر کشش سطحی است.

(۳) نسبت انرژی جنبشی بر نیروی ویسکوز است.

(۴) نسبت نیروی ویسکوز بر نیروی اینرسی است.

۳۴. اگر مقیاس طول در مدل هیدرولیکی را $\frac{1}{5}$ در نظر بگیریم در یک کانال باز مقیاس

نیرو چقدر خواهد بود؟

$$\frac{1}{62500} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{1250} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{17677} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2500} \quad (۳)$$